

**BEITRÄGE ZUR SYNTHESE MEHRDIMENSIONALER
REAKTANZMEHRTORE**

DISSERTATION
zur
Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der
Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von
ANTON KUMMERT
Amberg

Bochum 1988



Digitized by the Internet Archive
in 2026

**BEITRÄGE ZUR SYNTHESE MEHRDIMENSIONALER
REAKTANZMEHRTORE**

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Abteilung für Elektrotechnik

an der Ruhr-Universität Bochum

von

ANTON KUMMERT

Amberg

Bochum 1988

Dissertation eingereicht am: 26. Januar 1988

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Februar 1988

Referent: Prof. Dr. sc. techn. Dr. hc. A. Fettweis

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. J. F. Böhme

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
Formelzeichen und Abkürzungen	4
<u>1. Einleitung</u>	5
<u>2. Schreibweise und Definitionen</u>	8
<u>3. Mehrdimensionale Netzwerke</u>	11
3.1 Begriffsbestimmung	11
3.2 Die Streumatrix mehrdimensionaler Reaktanzmehrtore	13
3.2.1 Beschreibung im <u>p</u> -Bereich	13
3.2.2 Beschreibung im <u>z</u> -Bereich	17
<u>4. Minimale Synthese zweidimensionaler Reaktanzmehrtore</u>	26
4.1 Prinzip des Syntheseverfahrens	26
4.2 Erster Syntheseschritt	29
4.3 Zweiter Syntheseschritt	36
4.4 Zusammenfassung des Syntheseverfahrens	61
<u>5. Testverfahren für zweidimensionale Hurwitzpolynome</u>	63
5.1 Testverfahren für zweidimensionale Haupt-Hurwitzpolynome	64
5.2 Testverfahren für zweidimensionale Hurwitzpolynome im strengen Sinne	73
<u>6. Synthese multidimensionaler Reaktanzmehrtore</u>	77
6.1 Beweis für die Nichtexistenz eines allgemeinen Syntheseverfahrens	77
6.2 Bauelementaufwand bei der Realisierung multidimensionaler Reaktanzmehrtore	103
6.3 Synthese multidimensionaler Netzwerke unter Verwendung aktiver Bauelemente	109

7.	<u>Rückführung eines k-D-Digitalfilters auf ein</u>	
	<u>1-D-Digitalfilter</u>	132
7.1	Prinzip der Rückführung	132
7.2	Einfluß des Anfangszustandes	146
7.3	Entwurf multidimensionaler Wellendigitalfilter	148
8.	<u>Zusammenfassung</u>	152
	<u>Anhang</u>	155
	<u>Literaturverzeichnis</u>	201

Formelzeichen und Abkürzungen

$=$	gleich
$\equiv$	identisch gleich
$\neq$	nicht identisch gleich
$:=$	definiert durch
$\hat{=}$	entspricht
$\det \underline{A}$	Determinante der Matrix $\underline{A}$
$\text{rank } \underline{A}(\underline{p})$	Normalrang der rationalen Matrix $\underline{A}$
$\text{l-rank } \underline{A}(\underline{p}_0)$	Lokalrang der rationalen Matrix $\underline{A}$ an der Stelle $\underline{p}_0$
$\dim \underline{A}$	Ordnung der Matrix $\underline{A}$
$\underline{A}^T$	Transponierte der Matrix $\underline{A}$
$\underline{A}^*$	komplexe Konjugation und Transposition der Elemente von $\underline{A}$
n_A	McMillan Grad der rationalen Matrix $\underline{A}$
$\underline{1}_n$	Einheitsmatrix der Ordnung n
$\underline{1}$	Einheitsmatrix ohne Angabe der Ordnung
$\underline{A}^{-1}$	Inverse der Matrix $\underline{A}$
$\underline{A}_*$	Parakonjugation
$\underline{A}_{\sim}$	diskrete Parakonjugation
$\deg a(\underline{p})$	Gesamtgrad des Polynoms a
$\deg_i a(\underline{p})$	Teilgrad des Polynoms a bezüglich der Variablen p_i
$\in$	ist Element von
$\notin$	ist kein Element von
$\subset$	ist Teilmenge von
$A \setminus B$	Menge A ohne die Menge B
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen
$\forall$	für alle
$\otimes$	Kronecker-Produkt (siehe A 4.13)

1. Einleitung

In den letzten zehn Jahren wurden beträchtliche Aktivitäten auf dem Gebiete der mehrdimensionalen Systemtheorie entfaltet, die hauptsächlich durch mannigfaltige Anwendungen in den Bereichen Bildverarbeitung, Geophysik und medizinische Technik angeregt wurden.

Die Entwicklung schneller, hochintegrierter Signalprozessoren und der zugehörigen Speicherbausteine verschaffte der digitalen multidimensionalen Informationsverarbeitung besondere Bedeutung in den oben erwähnten Gebieten. Die hierbei auftretenden Probleme bzgl. Stabilität, Koeffizientenempfindlichkeit und nichtlinearer Effekte aufgrund endlicher Rechengenauigkeit sind weitaus komplexer als im eindimensionalen Fall und scheinen für viele Strukturen unüberwindlich. Die einzigen rekursiven Systeme, mit denen diese Schwierigkeiten überwunden werden können, bildet die Klasse der mehrdimensionalen Wellendigitalfilter [1, 2], da diese ihre bekannten guten Eigenschaften bei der Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen nicht verlieren.

Die Grundlage für den Entwurf dieser Filter bildet bekanntlich ein analoges Referenznetzwerk, das mit Methoden der zeitkontinuierlichen Netzwerktheorie behandelt werden kann. Lediglich für spezielle Klassen solcher zweidimensionalen Referenzfilter, z.B. Fächerfilter [3, 4, 5], stehen bereits geeignete Syntheseverfahren zur Verfügung.

In der vorliegenden Arbeit hingegen wird das allgemeine Syntheseproblem aufgegriffen und im ersten Teil ein Verfahren für eine minimale Realisierung zweidimensionaler Reaktanzmehrtore vorgestellt. Ausgangspunkt ist die vollständig gegebene Streumatrix des zu realisierenden verlustfreien Mehrtors. Neben der besonderen Bedeutung für den Entwurf mehrdimensionaler Wellendigitalfilter ist das behandelte Problem auch aus netzwerktheoretischer Sicht interessant, da die vorgestellte Lösung einen Existenzbeweis für eine minimale Realisierung, bei vorgegebener Matrixbeschreibung, liefert. Daher ist es nicht verwunderlich, daß bereits in den sechziger Jahren der Versuch gemacht wurde [6], ausgehend von der Reaktanzmatrix, dieses Problem zu lösen. Damals waren jedoch bestimmte Eigenschaften von Reaktanz-Hurwitzpolynomen [7], die in diesem Zusammenhang benötigt werden, noch nicht bekannt, so daß der damalige Beweis als unvollständig betrachtet werden muß. Insbesondere bildet Theorem 3, Unter-

punkt (iii) der Publikation [6] einen Widerspruch zu Satz A 1.8 dieser Arbeit. Außerdem ist es vorteilhafter, die Streumatrix als Ausgangspunkt zu wählen, da diese auch auf Fälle anwendbar ist, für die eine Reaktanzmatrix nicht existiert. Weiterhin schließt das neue Verfahren den Fall komplexer Systeme ein, der in früheren Publikationen ausgeklammert wurde. Diese Erweiterung ist sinnvoll, da komplexe Netzwerke im mehrdimensionalen Fall [57] von beträchtlichem Interesse sein werden. Im Zusammenhang mit der Synthese von Schaltungen, die auch Leitungselemente enthalten [8], wurde ein Verfahren entwickelt, mit dessen Hilfe Streumatrizen, ähnlichen Typs wie die hier behandelten, realisiert werden können. Dieser Algorithmus in [8] ist sehr kompliziert, da er die Taylorentwicklung einer zweidimensionalen, rationalen Matrix erfordert, wobei auf Konvergenzprobleme nicht eingegangen wurde (vergl. A 7). Außerdem muß ein sehr umfangreiches lineares Gleichungssystem gelöst werden. Das Auftreten außerwesentlicher Singularitäten zweiter Art auf dem Rand eines bestimmten Polyzylinders bei den untersuchten Streumatrizen (vergl. A 7) und die Erweiterung auf komplexe Systeme wurde ebenso wenig behandelt.

Ein weiterer Versuch aus dem Jahre 1966 [9], die Synthese mehrdimensionaler, passiver Mehrtore zu lösen, hat sich als fehlerhaft erwiesen, was durch ein Gegenbeispiel in [10] gezeigt wurde.

Da bekanntlich jedes allgemeine Syntheseverfahren für Reaktanznetzwerke zugleich einen Testalgorithmus für Haupt-Hurwitzpolynome liefert, wurden im fünften Kapitel notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, ob ein vorgegebenes Polynom zweier Veränderlicher zur Klasse der Haupt-Hurwitzpolynome gehört.

Der zweite Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Synthese multidimensionaler Reaktanzmehrtore. Es konnte gezeigt werden, daß für höhere Dimensionen als der zweiten i.a. keine konkret passive Schaltung für eine vorgegebene Streumatrix existiert. Es ist jedoch möglich, hierfür ein Netzwerk anzugeben, das auch negative frequenzabhängige Bauelemente enthält. Solch eine Schaltung kann aber nicht mehr als Referenznetzwerk für ein Wellendigitalfilter dienen, weshalb im letzten Abschnitt gezeigt wird, wie ein k -dimensionales (k -D) System auf ein eindimensionales zurückgeführt werden kann, unter Berücksichtigung der endlichen Länge des Eingangsdatenfeldes eines solchen zeitdiskreten Filters.

Die vorliegende Behandlung des Syntheseproblems wurde durch neuere Veröffentlichungen auf dem Gebiete der Netzwerktheorie erst möglich gemacht, die sich eingehend mit den Eigenschaften mehrdimensionaler Streumatrizen [11, 12] und insbesondere deren Nennerpolynomen [7] beschäftigen. Die speziellen Charakteristika dieser sogenannten Haupt-Hurwitzpolynome und deren Verwandtschaft mit positiven Funktionen bilden die Basis für diese Arbeit.

Des weiteren wurde auf die Theorie der Zustandsraumdarstellung von Mehrgrößensystemen [13] zurückgegriffen, wobei die Eigenschaften von Block-Begleitmatrizen eine besondere Rolle spielten.



2. Schreibweise und Definitionen

Mit rationale Matrix oder Funktion werden Ausdrücke in $k \geq 1$ komplexen Variablen $p_i, z_i, i \in I_k$, bezeichnet, wobei

$$I_k = \{1, 2, \dots, k\}.$$

Diese Größen werden zu Vektoren zusammengefaßt:

$$p = (p_1, \dots, p_k), \quad z = (z_1, \dots, z_k).$$

Die Schreibweise $\operatorname{Re} p > 0$ symbolisiert

$$\operatorname{Re} p_i > 0 \quad \forall \quad i \in I_k,$$

und $|z| > 1$ bedeutet

$$|z_i| > 1 \quad \forall \quad i \in I_k.$$

Manchmal ist es angebracht, das k -Tupel p als $p = (p_i, p')$ zu schreiben, wobei p' das $(k-1)$ -Tupel $p' = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_k)$ repräsentiert, mit $i \in I_k$. Die gleichen Aussagen gelten analog für $z = (z_i, z')$.

Funktionen in k unabhängigen komplexen Variablen werden im folgenden auch als k -dimensionale Funktionen bezeichnet.

Mehrdimensionale Polynome $a(p)$ und Polynommatrizen $\underline{A}(p)$ können als Polynom in einer der Variablen, mit Koeffizienten aus dem Ring der Polynomfunktionen bzw. Polynommatrizen in den anderen Variablen, geschrieben werden. Der höchste Exponent in einer solchen Schreibweise für die Variable p_i , für den der zugehörige Polynomkoeffizient nicht identisch null ist, wird als Teilgrad bezüglich der i -ten Variablen bezeichnet:

$$n_i := \deg_i a(p) \text{ bzw. } n_i := \deg_i \underline{A}(p).$$

Andererseits kann $a(p)$ auch wie folgt geschrieben werden:

$$a(p) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_k=0}^{n_k} A_{i_1, \dots, i_k} p_1^{i_1} \dots p_k^{i_k}, \quad A_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{C}.$$

Als Gesamtgrad des Polynoms $a(p)$ bezeichnet man das Maximum der Summe $(i_1 + i_2 + \dots + i_k)$, für die der entsprechende Koeffizient $A_{i_1, \dots, i_k}$ ungleich null ist:

$$n := \deg a = \max \sum_{l=1}^k i_l, \quad \text{mit } A_{i_1, \dots, i_k} \neq 0.$$

Ein Polynom h wird als Faktor von a bezeichnet, falls a durch h vollständig dividierbar ist und der Gesamtgrad von h größer oder gleich eins ist.

Zwei Polynome sind teilerfremd, falls sie keinen gemeinsamen Faktor besitzen.

Der Quotient zweier Polynome wird als irreduzibel bezeichnet, falls Nenner- und Zählerpolynom keinen gemeinsamen Faktor besitzen, d.h. teilerfremd sind.

Matrizen und Vektoren werden durch Unterstreichung gekennzeichnet, und Transposition wird durch ein hochgestelltes T symbolisiert.

Eine rationale Matrix ist regulär, falls ihre Determinante nicht identisch gleich null ist. Eine rationale Matrix $\underline{A}(p)$ besitzt den Normalrang $\text{rank } \underline{A} = r$, falls mindestens ein $(r \times r)$ -Minor von $\underline{A}$ nicht identisch null ist und alle $(l \times l)$ -Minoren von $\underline{A}$, mit $l > r$, identisch gleich null sind.

Hiervon ist der lokale Rang der Matrix $\underline{A}(p_0)$ zu unterscheiden, der den Matrixrang im üblichen Sinne für den festen Punkt p_0 bezeichnet.

Eine Polynommatrix heißt unimodular, falls ihre Determinante eine von null verschiedene Konstante ergibt.

Ein hochgestellter Stern symbolisiert die komplexe Konjugation und Transposition der Elemente einer Matrix.

Die Parakonjugation wird mit einem tiefgestellten Stern gekennzeichnet und nur auf die Variable $\underline{p}$ angewandt, während die diskrete Parakonjugation mit einer Tilde symbolisiert und lediglich auf die Variable $\underline{z}$ angewandt wird:

$$\underline{A}_*(\underline{p}) := \underline{A}^* (-\underline{p}^*) \quad (2.1a)$$

$$\underline{\tilde{B}}(\underline{z}) := \underline{B}^* \left(\frac{1}{\underline{z}^*} \right) \quad (2.1b)$$

Man beachte, daß Stern und Tilde Transposition zur Folge haben. Die diskrete Parakonjugation von Polynomen wird manchmal auch anders definiert (vgl. [14]). Dies kann jedoch zu Schwierigkeiten bei zweimaliger Anwendung dieser Operation führen, da eine eindeutige Rückgewinnung von $\underline{g}(\underline{z})$ aus $\underline{\tilde{g}}(\underline{z})$ nicht immer möglich ist, weshalb hier obige Definition grundsätzlich auch auf Polynome angewandt wird.

Wenn nicht anders definiert, so sind implizit alle Variablen und Funktionen über dem Körper der komplexen Zahlen erklärt, lediglich der Buchstabe ω wird stets für reelle Zahlen benutzt, so bezeichnet beispielsweise $\underline{\omega}$ das k -Tupel $(\omega_1, \dots, \omega_k) \in \mathbb{R}^k$.

Die Symbole $\underline{S}$ und $\underline{S}(\underline{z})$ werden gleichwertig nebeneinander benutzt, d.h., es wird nicht immer zwischen der Funktion $\underline{S}$ und dem Wert der Funktion $\underline{S}$ an der Stelle $\underline{z}$ unterschieden. Dies ist für die vorliegenden Untersuchungen nicht notwendig und erleichtert lediglich die Lesbarkeit der Formelausdrücke.

3. Mehrdimensionale Netzwerke

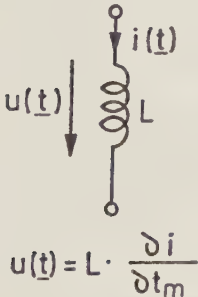
In diesem Kapitel sollen die aus der Literatur bereits bekannten Eigenschaften mehrdimensionaler Reaktanznetzwerke zusammengefaßt und für die weiteren Abschnitte aufbereitet werden, da sie die Basis für die vorgestellten Sytheseverfahren bilden.

3.1 Begriffsbestimmung

Unter einem mehrdimensionalen Reaktanzmehrtor verstehen wir im folgenden ein Netzwerk im klassischen Sinne, für das die Kirchhoffschen Gleichungen bzgl. Strömen und Spannungen gelten und das aus folgenden Bauelementen bestehen kann:

- ideale Leitungsverbindungen,
- energieneutrale, konstante Bauelemente, z.B. ideale Übertrager, Gytratoren, Zirkulatoren, imaginäre Widerstände,
- zwei verschiedene Typen reaktiver Bauelemente, nämlich Induktivität und Kapazität, die durch folgende lineare Differenzialgleichungen definiert sind:

Induktivität



Kapazität

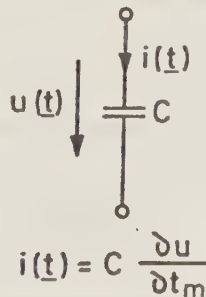


Bild 3.1 Definition der reaktiven Bauelemente

$$\underline{t} = \{t_1, \dots, t_k\}$$

Zeitvektor

k

Dimension des Netzwerkes

$$m \in I_k$$

Jeder Zeitkomponente t_m wird eine komplexe Frequenzvariable p_m zugeordnet.

Im eingeschwungenen Zustand gilt analog zum eindimensionalen Fall für die komplexen Strom- und Spannungsgrößen

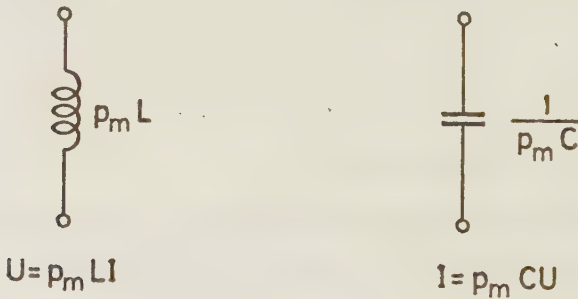


Bild 3.2

Demnach wird jeder Induktivität bzw. Kapazität nicht nur der Bauelementwert L bzw. C zugeordnet, sondern außerdem eine bestimmte Frequenzvariable p_m , $m \in I_k$ (vergl. Bild 3.3).

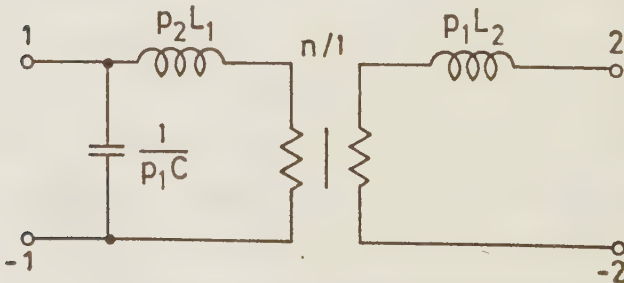


Bild 3.3 Beispiel für ein zweidimensionales Reaktanzzweitor

3.2 Die Streumatrix mehrdimensionaler Reaktanzmehrtore

3.2.1 Beschreibung im p -Bereich

Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen ist die Streumatrix eines verlustlosen, mehrdimensionalen Mehrtors, da sie, im Gegensatz zur Impedanz- bzw. Admittanzmatrix, in jedem Falle existiert. Die aus der klassischen Theorie eindimensionaler Reaktanznetzwerke bekannten Eigenschaften konnten auch für mehrdimensionale Filter gezeigt werden [11, 12], wobei jedoch das Konzept des Hurwitzpolynoms nicht auf triviale Weise erweitert werden kann, sondern neue Definitionen und Klassifizierungen notwendig wurden [12, 7, 14]. Einige wichtige Theoreme über mehrdimensionale Hurwitzpolynome sind im Anhang zusammengefaßt und mit Hinweisen auf entsprechende Literaturstellen versehen.

Definition 3.1:

Ω_p sei die Menge aller Matrizen $\underline{A}(p)$, die folgenden Bedingungen genügen:

- i) $\underline{A}(p)$ ist rational in p .
- ii) Die Elemente von $\underline{A}$ sind für $\text{Re } p > 0$ holomorph.
- iii) $\underline{A}$ ist paraunitär, d.h.

$$\underline{A}_* \underline{A} = \underline{A} \underline{A}_* = \underline{1}, \quad (3.1)$$

wobei $\underline{1}$ die Einheitsmatrix symbolisiert.

Satz 3.1:

Alle Matrizen $\underline{A}(\underline{p}) \in \Omega_p$ besitzen folgende Eigenschaften:

- i) Für die Determinante von $\underline{A}$ gilt

$$\det \underline{A} = -\sigma \frac{a^*}{a}, \quad (3.2)$$

wo σ eine unimodulare Konstante ist, d.h. $|\sigma| = 1$, und a ein Haupt-Hurwitzpolynom [7] darstellt.

- ii) $\underline{A}$ kann stets als Quotient aus einer Polynommatrix $\underline{B}$ und dem durch (3.2) definierten Haupt-Hurwitzpolynom a geschrieben werden, wobei $\underline{B}$ und a nicht notwendigerweise teilerfremd sein müssen:

$$\underline{A} = \frac{\underline{B}}{a}. \quad (3.3)$$

- iii) Die Elemente von $\underline{A}$ sind unimodular beschränkt, für $\operatorname{Re} p > 0$.

- iv) $\deg_i \underline{B} = \deg_i a = n_i \quad \forall \quad i \in I_k$.

Beweis:

Die Aussagen i) und ii) wurden von Fettweis in [12] bereits gezeigt.

- zu iii) Die Elemente der $(m \times m)$ -Matrix $\underline{A}$ werden mit A_{ij} bezeichnet.

Aus der Paraunitarität von $\underline{A}$ folgt

$$\sum_{j=1}^m A_{ij} A_{ij}^* = 1 \quad \forall \quad i \in I_m.$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^m |A_{ij}(j\omega)|^2 = 1$$

$\Rightarrow |A_{ij}(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \quad i, j \in I_m$ und alle Punkte $j\omega$, für die $A_{ij}(j\omega)$ keine außerwesentliche Singularität zweiter Art besitzt. Des weiteren ist aufgrund der Definition 3.1 $A_{ij}(p)$ holomorph für $\operatorname{Re} p > 0$. Diese beiden Eigenschaften führen zusammen mit A 3.1 zur Behauptung

$$|A_{ij}(p)| \leq 1 \quad \text{für } \operatorname{Re} p > 0.$$

zu iv) Aus $|A_{ij}(p)| \leq 1$ für $\operatorname{Re} p > 0$ folgt

$$\deg_i \underline{B} \leq \deg_i a.$$

Aus $\lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \underline{A}(j\omega) \quad \underline{A}(j\omega)^* = \underline{1}$ folgt

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \underline{A}(j\omega) \neq \underline{0}.$$

$$\Rightarrow \deg_i \underline{B} = \deg_i a.$$

q.e.d.

Aus der Literatur [11, 12] ist bekannt, daß die Streumatrix eines jeden mehrdimensionalen Reaktanzmehrtors ein Element aus Ω_p ist. Nun stellt sich natürlich die Frage, ob auch umgekehrt zu jeder Matrix $\underline{A}(p)$ aus Ω_p ein konkret passives Netzwerk gehört, so daß $\underline{A}(p)$ die Streumatrix dieser Schaltung darstellt. Falls dieses behauptet werden kann, so ist es wünschenswert, ein Syntheseverfahren zu entwickeln, das eine zu $\underline{A}$ gehörige Schaltung liefert und die Frage nach dem notwendigen Bauelementaufwand dieser Realisierung beantwortet.

Für konstante und eindimensionale Matrizen $\underline{A} \in \Omega_p$ ist aus der klassischen Netzwerktheorie bekannt, daß stets eine kanonische Schaltung gefunden werden kann [35, 24], d.h., die Anzahl der reaktiven Bauelemente entspricht dem Grad des Hurwitzpolynoms a in (3.2).

Mehrdimensionale Matrizen werden in den Kapiteln 4 und 6.1 auf die Beantwortung der oben aufgeworfenen Fragen hin untersucht.

3.2.2 Beschreibung im z -Bereich

Bei der Beschreibung zeitdiskreter Systeme wird oft von der sog. Bilineartransformation

$$z_i = \frac{1 + p_i}{1 - p_i}, \quad p_i = \frac{z_i - 1}{z_i + 1} \quad (3.4)$$

Gebrauch gemacht. Diese konforme Abbildung der komplexen p_i -Ebene auf die komplexe z_i -Ebene hat sich auch bei der Analyse des vorliegenden Problems als nützliches Hilfsmittel erwiesen, obwohl das Syntheseverfahren keinen Bezug zu zeitdiskreten Systemen herstellt. Selbstverständlich sind alle Betrachtungen auch im p -Bereich möglich, wodurch jedoch Notation und Argumentation an vielen Stellen umständlicher und undurchsichtiger werden. Die Vorteile obiger Transformation ergeben sich aus der Tatsache, daß es im Zusammenhang mit Streumatrizen günstiger ist, die Reflektanz der reaktiven Eintore des zugehörigen Netzwerks zu betrachten, als deren Admittanz bzw. Impedanz. So stellt gerade z_i^{-1} die Reflektanz einer Kapazität mit der Admittanz p_i dar, wobei der Torwiderstand gleich eins gewählt wurde (siehe Bild 3.4).

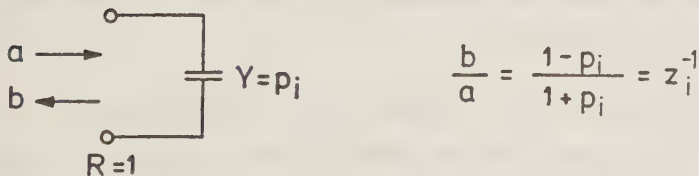


Bild 3.4 Reflektanz einer Kapazität

Aufgrund dieser Transformation konnte ausgiebig von Ergebnissen aus der Theorie zeitdiskreter, mehrdimensionaler Systeme Gebrauch gemacht werden. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß gerade im Zusammenhang mit mehrdimensionalen Filtern oft die reziproke Definition für die Variable z_i benutzt wird, was jedoch im vorliegenden Fall die Notation erheblich verkompliziert hätte, da alle Polynome in z_i^{-1} geschrieben werden müßten.

Wendet man die Transformation (3.4) auf eine rationale Funktion in $\underline{p}$ an, so entsteht eine rationale Funktion in $\underline{z}$. Fettweis [14] untersuchte Polynome, die durch die reziproke Transformation auseinander hervorgehen. Hierbei definierte er die Klasse der diskreten Haupt-Hurwitzpolynome, welche von Haupt-Hurwitzpolynomen in $\underline{p}$ abgeleitet wurden.

In dieser Arbeit hingegen werden Polynome in $\underline{z}$ auftreten, die außerhalb des Hyper-Einheitskreises des $\underline{z}$ -Bereichs keine Nullstellen besitzen. Die Eigenschaften dieser Polynome können auf ähnliche Weise wie in [14] hergeleitet oder direkt aus den Eigenschaften diskreter Haupt-Hurwitzpolynome gewonnen werden, indem man alle Aussagen für die am Hyper-Einheitskreis gespiegelten Punkte trifft. Aus diesem Grunde werden lediglich die wichtigsten Charakteristika aufgeführt und die Beweise möglichst kurz gefaßt, da diese auf triviale Weise aus der Arbeit [14] hervorgehen.

Im weiteren symbolisiert die Schreibweise $\frac{z-1}{z+1}$ das k -Tupel $(\frac{z_1-1}{z_1+1}, \dots, \frac{z_k-1}{z_k+1})$ usw., um die Notation übersichtlicher zu gestalten.

Definition 3.2:

Sei $a(\underline{p})$ ein Haupt-Hurwitzpolynom, so wird

$$g(\underline{z}) := a\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \prod_{i=1}^k (z_i+1)^{n_i} \quad (3.5)$$

ein assoziiertes Haupt-Hurwitzpolynom (kurz AHHP) genannt, wo

$$n_i = \deg_i a.$$

Außerdem werde folgende Schreibweise vereinbart:

$$g(\underline{z}) = g_0(\underline{z}') + g_1(\underline{z}')z_1 + \dots + g_{n_1}(\underline{z}')z_1^{n_1}, \quad i \in I_k.$$

Satz 3.2:

Ein AHHP $g(\underline{z})$ besitzt folgende Eigenschaften:

- i) $g(\underline{z}) \neq 0$ für $|\underline{z}| > 1$.
- ii) Die Menge der Punkte $\underline{\omega}$, für die $g(e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_k}) = 0$ ist, bildet höchstens eine $(k-2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.
- iii) Sei $g(z_1, z_2)$ ein zweidimensionales AHHP, dann gilt

$$g(\underline{z}) \neq 0 \quad \text{für} \quad |z_1| = 1 \text{ und } |z_2| > 1$$

$$\text{oder} \quad |z_1| > 1 \text{ und } |z_2| = 1.$$
- iv) $\deg_i g = \deg_i a = n_i$, $i \in I_k$,
wobei a durch (3.5) definiert ist.
- v) $g_{n_i}(\underline{z}')$ ist ein AHHP in $\underline{z}'$, $i \in I_k$, mit

$$\deg_j g_{n_i} = n_j, \quad j \in I_k \setminus \{i\}.$$

Beweis:

Die Aussagen i) bis iii) können analog zu dem Beweis für diskrete Haupt-Hurwitzpolynome [14] gezeigt werden.

$$\text{zu iv)} \quad g_{n_i}(\underline{z}') = \lim_{z_i \rightarrow \infty} \frac{g(\underline{z})}{(z_i+1)^{n_i}} = a(p_i=1, \frac{z'-1}{z'+1}) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k (z_l+1)^{n_l} \neq 0,$$

da $a(\underline{p})$ keinen Faktor (p_i-1) besitzen kann.

zu v) $g_{n_i}(\underline{z}')$ ist ein AHHP, da

$$f(\underline{p}') := a(p_i=1, \underline{p}')$$

ein Haupt-Hurwitzpolynom in $\underline{p}'$ ist (vergl. A 1.1) und

$$g_{n_i}(\underline{z}') = f\left(\frac{z'-1}{z'+1}\right) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k (z_l+1)^{n_l}$$

der Definition 3.2 entspricht.

Des weiteren gilt für $f(\underline{p}')$

$$\deg_1 f(\underline{p}') = \deg_1 a(\underline{p}) = n_1, \quad 1 \in \mathbb{I}_k \setminus \{i\},$$

(vergl. A 1.1).

Mit den gleichen Argumenten wie unter Punkt iv) erhält man

$$\deg_1 g_{n_i} = \deg_1 f(\underline{p}') = n_1, \quad 1 \in \mathbb{I}_k \setminus \{i\}.$$

q.e.d.

Lemma 3.1:

Es sei $\underline{A}(\underline{p})$ eine rationale Matrix in $\underline{p}$, und $\underline{S}(\underline{z})$ sei eine rationale Matrix in $\underline{z}$, und außerdem bestehe der Zusammenhang

$$\underline{S}(\underline{z}) = \underline{A}\left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1}\right), \quad \underline{A}(\underline{p}) = \underline{S}\left(\frac{1+\underline{p}}{1-\underline{p}}\right),$$

so gilt für die diskret Parakonjugierte von $\underline{S}$

$$\underline{S}(\underline{z}) = \underline{A}_*\left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1}\right)$$

und für die Parakonjugierte von $\underline{A}$

$$\underline{A}_*(\underline{p}) = \underline{S}\left(\frac{1+\underline{p}}{1-\underline{p}}\right).$$

Beweis:

Wendet man (2.1b) auf $\underline{S}$ an und berücksichtigt (2.1a), so erhält man aufgrund der gemachten Voraussetzung die erste Behauptung und entsprechend auch die zweite.

Definition 3.3:

$\Omega_{\underline{z}}$ sei die Menge aller Matrizen $\underline{S}(\underline{z})$, die folgenden Bedingungen genügen:

- i) $\underline{S}(\underline{z})$ ist rational in $\underline{z}$.
- ii) Die Elemente von $\underline{S}$ sind für $|\underline{z}| > 1$ (also auch im Unendlichen) holomorph.
- iii) $\underline{S}$ ist diskret paraunitär, d.h.

$$\underline{S} \underline{S} = \underline{S} \underline{S} = \underline{1}, \quad (3.6)$$

wo $\underline{1}$ die Einheitsmatrix symbolisiert.

Satz 3.3:

Eine Matrix $\underline{S}(\underline{z})$ ist genau dann ein Element von $\Omega_{\underline{z}}$, wenn

$$\underline{A}(\underline{p}) := \underline{S}\left(\frac{1+\underline{p}}{1-\underline{p}}\right) \in \Omega_{\underline{p}}.$$

Beweis:

Hinlänglichkeit: Sei $\underline{A}(\underline{p}) \in \Omega_{\underline{p}}$, dann gilt folgendes:

i) $\underline{S}(\underline{z}) = \underline{A}\left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1}\right)$ ist rational in $\underline{z}$.

ii) Sei $|\underline{z}| > 1$ und damit $\operatorname{Re} \underline{p} > 0$,

so sind die Element von $\underline{A}(\underline{p})$ holomorph. Die gleiche Aussage gilt somit auch für $\underline{S}(\underline{z})$.

iii) Aus

$$\underline{A}_*(\underline{p}) \underline{A}(\underline{p}) = \underline{1}$$

folgt mit Lemma 3.1

$$\underline{S}\left(\frac{1+\underline{p}}{1-\underline{p}}\right) \underline{S}\left(\frac{1+\underline{p}}{1-\underline{p}}\right) = \underline{1},$$

d.h.

$$\underline{S}(\underline{z}) \underline{S}(\underline{z}) = \underline{1}.$$

Notwendigkeit: Der Beweis kann völlig analog geführt werden.

q.e.d.

Satz 3.4:

Jede Matrix $\underline{S}(\underline{z}) \in \Omega_{\underline{z}}$ besitzt folgende Eigenschaften:

i) Für die Determinante von $\underline{S}$ erhält man

$$\det \underline{S} = -\sigma \frac{g(\underline{z}) \prod_{i=1}^k z_i^{n_i}}{g(\underline{z})}, \quad (3.7)$$

wo σ eine unimodulare Konstante ist, d.h. $|\sigma| = 1$, und g ein AHHP darstellt, mit

$$n_i = \deg_i g.$$

iii) $\underline{S}$ kann stets als Quotient aus einer Polynommatrix $\underline{P}$ und dem durch (3.7) definierten AHHP g geschrieben werden, wobei $\underline{P}$ und g nicht notwendigerweise teilerfremd sein müssen:

$$\underline{S} = \frac{\underline{P}}{g}. \quad (3.8)$$

iii) $\deg_i \underline{P} \leq \deg_i g \quad \forall \quad i \in I_k.$

Beweis:

Aus Satz 3.3 folgt

$$\underline{A}(\underline{p}) := \underline{S}\left(\frac{1+\underline{p}}{1-\underline{p}}\right) = \frac{\underline{B}(\underline{p})}{a(\underline{p})} \in \Omega_{\underline{p}},$$

wobei $a(\underline{p})$ durch (3.2) definiert ist.

zu i) Sei $g(\underline{z})$ das zu $a(\underline{p})$ gehörige AHHP, so erhalten wir mit (3.2)

$$\det \underline{S}(\underline{z}) = \det \underline{A} \left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1} \right) = -\sigma \frac{a_* \left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1} \right)}{a \left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1} \right)}$$

und mit (3.5)

$$\det \underline{S}(\underline{z}) = -\sigma \frac{g(\underline{z}) \prod_{i=1}^k z_i^{n_i}}{g(\underline{z})} .$$

Hierbei ist zu beachten, daß gemäß (3.5)

$$g(\underline{z}) = a_* \left(\frac{1-\underline{z}^*}{1+\underline{z}^*} \right) \prod_{i=1}^k \left(\frac{1+z_i}{z_i} \right)^{n_i} = a_* \left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1} \right) \prod_{i=1}^k \left(\frac{z_i+1}{z_i} \right)^{n_i}$$

ist.

zu ii) Man schreibe $\underline{S}(\underline{z})$ als

$$\underline{S}(\underline{z}) = \frac{\underline{B} \left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1} \right) \prod_{i=1}^k (z_i+1)^{n_i}}{a \left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1} \right) \prod_{i=1}^k (z_i+1)^{n_i}} = \frac{\underline{P}(\underline{z})}{g(\underline{z})} ,$$

wo

$$\underline{P}(\underline{z}) := \underline{B} \left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1} \right) \prod_{i=1}^k (z_i+1)^{n_i}$$

eine Polynommatrix ist, da

$$\deg_i \underline{B}(\underline{p}) = \deg_i a = n_i .$$

zu iii) $\deg_i \underline{P} \leq \deg_i g$, da

$$\deg_i \underline{B} = \deg_i g = n_i .$$

q.e.d.

Aufgrund von Satz 3.3 ist jeder Matrix $\underline{A}(p) \in \Omega_p$ über die Transformation (3.4) eine Matrix $\underline{S}(z) \in \Omega_z$ zugeordnet und umgekehrt.

Deshalb ist es äquivalent zu fragen, ob zu jeder Matrix $\underline{S}(z) \in \Omega_z$ ein konkret passives Netzwerk existiert, so daß $\underline{S}(z)$ die Streumatrix dieser Schaltung ist, wo z_i^{-1} die Reflektanz einer Kapazität mit der Admittanz p_i darstellt. Diese Äquivalenz zwischen den Mengen Ω_p und Ω_z soll im folgenden ausgenutzt werden.

4. Minimale Synthese zweidimensionaler Reaktanzmehrtore

4.1 Prinzip des Syntheseverfahrens

Das nachfolgend beschriebene Syntheseverfahren für zweidimensionale Reaktanzmehrtore läßt sich in zwei Schritte gliedern.

Ausgangspunkt ist eine zweidimensionale (mxm) -Matrix $\underline{S}(z_1, z_2) \in \Omega_z$, welche vollständig bekannt sein muß. Die Aufgabe besteht darin, ein zweidimensionales, verlustloses Netzwerk N zu finden, dessen Streumatrix identisch ist mit der gegebenen Matrix $\underline{S}(z)$.

Im ersten Schritt des Syntheseverfahrens versucht man, eine eindimensionale Streumatrix $\underline{S}'(z_1)$ zu finden, die nur von z_1 abhängt und durch die ein $(m+mn_2)$ -Tor N' beschrieben wird. Die Ordnung der Matrix $\underline{S}'$ ist somit $(m+mn_2)$, und sie muß kein Element von Ω_z sein. Die einzige Forderung, die an $\underline{S}'(z_1)$ gestellt wird, ist folgende. Schließt man das durch $\underline{S}'$ beschriebene Netzwerk N' an seinen letzten mn_2 Toren mit Zweipolen ab, die alle die Reflektanz z_2^{-1} besitzen, so muß die Streumatrix des resultierenden zweidimensionalen m -Tors identisch mit der gegebenen Matrix $\underline{S}$ sein.

Die Signale an den z_2 -abhängigen Eintoren können als interne Zustände betrachtet werden. Deshalb ist es stets möglich, eine Ähnlichkeitstransformation derart auf $\underline{S}'$ anzuwenden, daß zwar die innere Struktur des Systems N verändert wird, jedoch das äußere Verhalten gleich bleibt, das durch die Streumatrix $\underline{S}$ beschrieben wird.

Im zweiten Schritt wird nun eine solche Ähnlichkeitstransformation derart ausgeführt, daß die resultierende Streumatrix

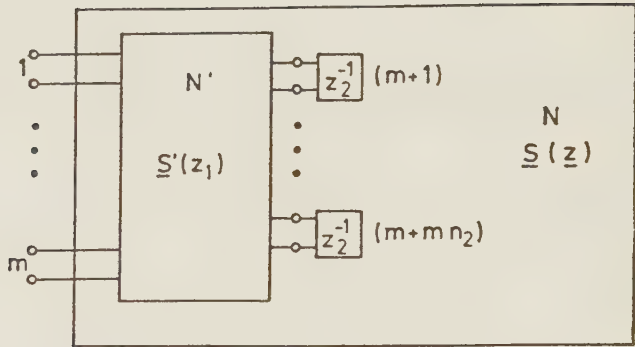
$$\underline{S}''(z_1) = \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \underline{S}'(z_1) \\ \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}^{-1} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} m \\ mn_2 \\ m \quad mn_2 \end{matrix}$$

des neuen Koppelnetzwerks N'' die Struktur

$$\underline{S}''(z_1) = \begin{bmatrix} \underline{S}'''(z_1) & \begin{bmatrix} \underline{F}_{13} \\ \underline{F}_{23} \end{bmatrix} \\ \underline{0} & \underline{F}_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m+n_2 \\ m+n_2 \end{matrix}$$

besitzt, wo die rationale Matrix $\underline{S}'''(z_1)$ ein Element aus Ω_z ist. Es wird gezeigt, daß das äußere Verhalten von N unabhängig von $\underline{F}_{13}$, $\underline{F}_{23}$ und $\underline{F}_{33}$ ist, wodurch es genügt, $\underline{S}'''(z_1)$ weiter zu betrachten. Da nun $\underline{S}'''(z_1)$ ein Element aus Ω_z ist, so kann hierfür mit bekannten Methoden eine Realisierung N''' gefunden werden und nach Abschluß der letzten n_2 Tore mit z_2^{-1} -Reflektanzen eine Realisierung für die gegebene Matrix $\underline{S}$. Es wird gezeigt, daß N''' mit n_1 reaktiven Bauelementen realisierbar ist, wodurch insgesamt die Anzahl frequenzabhängiger Elemente minimal wird. Das gesamte Verfahren wird durch Bild 4.1 verdeutlicht.

1. Schritt



Ähnlichkeitstransformation
mit $\begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix}$

2. Schritt

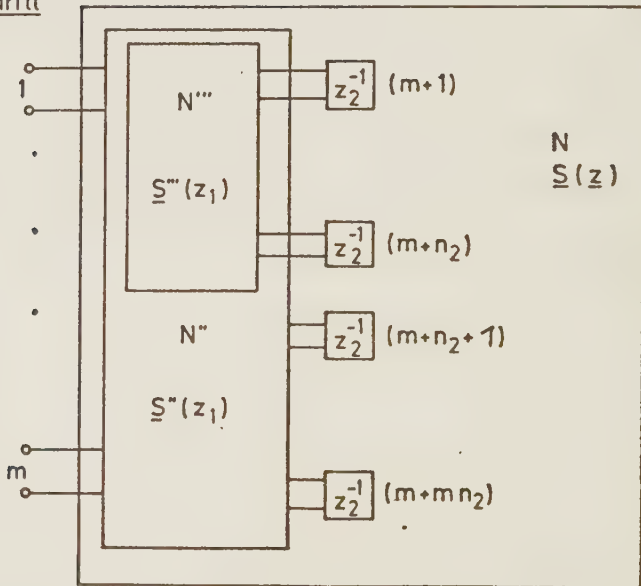


Bild 4.1 Synthese eines zweidimensionalen, verlustlosen m -Tors

4.2 Erster Syntheseschritt

Wie bereits im letzten Abschnitt angedeutet, soll zunächst eine ein-dimensionale, rationale Matrix $\underline{S}'(z_1)$ gefunden werden, die folgende Eigenschaft erfüllt. $\underline{S}'(z_1)$ wird als Streumatrix eines $(m+mn_2)$ -Tors betrachtet, das nach Abschluß der letzten mn_2 Tore mit z_2^{-1} -Reflektanzen in ein zweidimensionales m -Tor N übergeht, das durch die gegebene Matrix $\underline{S}(z)$ beschrieben wird. Hierbei wurde vorausgesetzt, daß

$$\underline{S}(z) \in \Omega_z.$$

Aus obiger Forderung läßt sich ein Zusammenhang zwischen $\underline{S}(z)$ und $\underline{S}'(z_1)$ herleiten, der eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Matrix $\underline{S}'$ darstellt.

Hierzu wird $\underline{S}'$ in Blöcke aufgeteilt:

$$\underline{S}'(z_1) = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ mn_2 \end{matrix} \quad (4.1)$$

$\begin{matrix} m & mn_2 \end{matrix}$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die Torwiderstände $R_{m+1}, \dots, R_{m+mn_2}$ gleich eins gewählt werden. Nach Abschluß der letzten mn_2 Tore von N' mit z_2^{-1} -Reflektanzen erhält man folgendes Gleichungssystem (vergl. Bild 4.2):

$$\underline{b} = \underline{S} \underline{a} \quad , \quad (4.2a)$$

$$\underline{a}' = z_2^{-1} \underline{b}' \quad , \quad (4.2b)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{b}' \end{bmatrix} = \underline{S}' \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{a}' \end{bmatrix} \quad . \quad (4.2c)$$

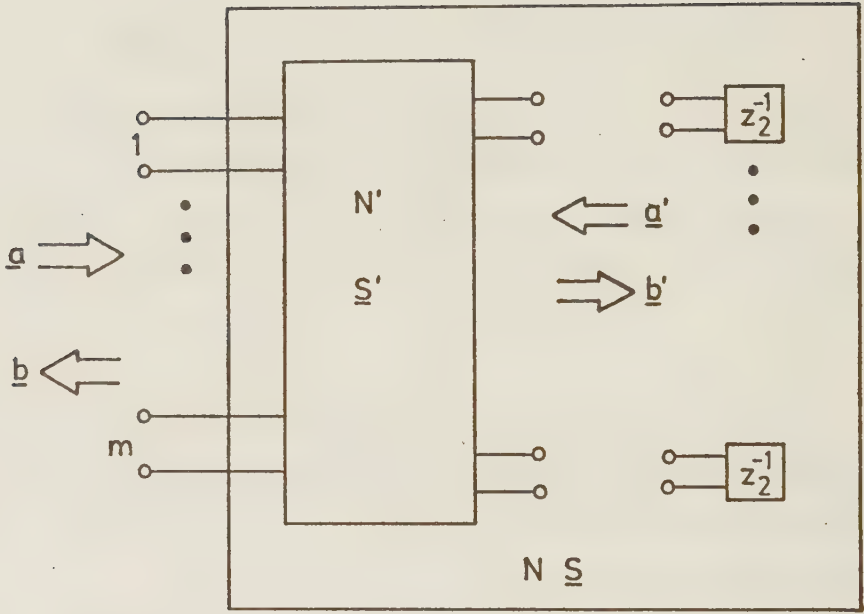


Bild 4.2

Eliminiert man in dem Matrixgleichungssystem (4.2) die Vektoren $\underline{b}$, $\underline{a}'$, $\underline{b}'$, so erhält man

$$[\underline{S} - \underline{S}_{11} - \underline{S}_{12} (z_2 \underline{1} - \underline{S}_{22})^{-1} \underline{S}_{21}] \underline{a} = \underline{0} \quad \forall \quad \underline{a}.$$

Da das System (4.2) für alle Werte von $\underline{a}$ erfüllt sein soll, so muß gelten

$$\underline{S} = \underline{S}_{11} + \underline{S}_{12} (z_2 \underline{1} - \underline{S}_{22})^{-1} \underline{S}_{21}. \quad (4.3)$$

Die Elemente von $\underline{S}'$ müssen nun so in Abhängigkeit der Elemente von $\underline{S}$ berechnet werden, daß Gleichung (4.3) erfüllt ist, wofür zunächst die Zählerpolynommatrix $\underline{P}$ und das Nennerpolynom g der Matrix $\underline{S}$ in geeigneter Form geschrieben werden (vergl. Satz 3.4):

$$\underline{p}(\underline{z}) = \underline{p}_0(z_1) + \underline{p}_1(z_1) z_2 + \dots + \underline{p}_{n_2}(z_1) z_2^{n_2}, \quad (4.4)$$

$$g(\underline{z}) = g_0(z_1) + g_1(z_1) z_2 + \dots + g_{n_2}(z_1) z_2^{n_2}, \quad (4.5)$$

mit

$$n_2 = \deg_{z_2} g(\underline{z}) \geq 1, \quad g_{n_2}(z_1) \neq 0.$$

Für die Lösung dieses Problems kann die aus der Zustandsraumdarstellung von eindimensionalen Eingrößensystemen bekannte Beobachtungsnormalform [15, Kapitel 1.5.2] benutzt werden.

Ersetzt man nämlich die dort auftretenden skalaren Matrixelemente durch die entsprechenden Matrizen eines Mehrgrößensystems, so bleibt die Struktur der Beobachtungsnormalform erhalten. Insbesondere wird die auftretende Begleitmatrix durch eine Block-Begleitmatrix (vergl. [59, Kapitel 3.5]) ersetzt. Des weiteren hängen nun, im Gegensatz zu eindimensionalen Systemen, die Matrizen der Zustandsraumdarstellung von der Variablen z_1 ab. Zwecks einfacher Notation werden folgende Größen definiert:

$$u_i(z_1) := \frac{g_i(z_1)}{g_{n_2}(z_1)}, \quad i = 0, \dots, n_2, \quad (4.6)$$

$$\underline{N}_i(z_1) := \frac{\underline{p}_i(z_1)}{g_{n_2}(z_1)}, \quad i = 0, \dots, n_2, \quad (4.7)$$

$$\underline{A}_i(z_1) := \underline{N}_i(z_1) - \underline{N}_{n_2}(z_1) u_i(z_1), \quad i = 0, \dots, n_2-1. \quad (4.8)$$

Satz 4.1:

Die nachfolgend definierten Matrizen $\underline{S}_{11}$, $\underline{S}_{12}$, $\underline{S}_{21}$ und $\underline{S}_{22}$ erfüllen die Gleichung (4.3):

$$\underline{S}_{11} := \underline{N}_{n_2}, \quad (4.9a)$$

$$\underline{S}_{21} := \begin{bmatrix} \underline{A}_0^T & \underline{A}_1^T & \dots & \underline{A}_{n_2-2}^T & \underline{A}_{n_2-1}^T \end{bmatrix}^T, \quad (4.9b)$$

$$\underline{S}_{12} := \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{1}_m \end{bmatrix}, \quad (4.9c)$$

$$\underline{S}_{22} := \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} & -\underline{u}_0 \underline{1}_m \\ \underline{1}_m & \underline{0} & \dots & \underline{0} & -\underline{u}_1 \underline{1}_m \\ \underline{0} & \underline{1}_m & & \underline{0} & -\underline{u}_2 \underline{1}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{1}_m & -\underline{u}_{n_2-1} \underline{1}_m \end{bmatrix}, \quad (4.9d)$$

wo

$$\underline{S}_{12} = \underline{1}_m \quad \text{und} \quad \underline{S}_{22} = -\underline{u}_0 \underline{1}_m \quad \text{für} \quad n_2 = 1.$$

Beweis:

Für $n_2=1$ ist der Beweis trivial, weshalb im folgenden $n_2 > 1$ angenommen wird.

Zunächst wird die Matrix $(z_{21} \underline{1}_{mn_2} - \underline{S}_{22})$ mit Hilfe von (4.9d) gebildet und in Blöcke aufgeteilt:

$$\begin{aligned}
 (z_2^{-1} m n_2^{-1} S_{22}) &= \left[\begin{array}{cccc|c} z_2^{-1} m & 0 & . & . & 0 & u_0^{-1} m \\ -1_m & z_2^{-1} m & & & 0 & u_1^{-1} m \\ 0 & -1_m & . & & 0 & u_2^{-1} m \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & -1_m & z_2^{-1} m & u_{n_2-2}^{-1} m \\ \hline 0 & 0 & & -1_m & (z_2 + u_{n_2-1})^{-1} m \end{array} \right] = \\
 &= \left[\begin{array}{cc} \underline{M}_{11} & \underline{M}_{12} \\ \underline{M}_{21} & \underline{M}_{22} \end{array} \right] \begin{array}{c} (n_2-1)m \\ m \\ (n_2-1)m \quad m \end{array} \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Durch die rationalen Matrizen $\underline{M}_{12}$, $\underline{M}_{21}$, $\underline{M}_{22}$ und die Inverse von $\underline{M}_{11}$

$$\underline{M}_{11}^{-1} = \left[\begin{array}{cccc|c} z_2^{-1} m & 0 & . & . & 0 \\ z_2^{-2} m & z_2^{-1} m & & & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & . & . \\ -(n_2-1) & -(n_2-2) & . & . & . \\ z_2^{-1} m & z_2^{-1} m & . & . & z_2^{-1} m \end{array} \right] \quad (4.11)$$

läßt sich eine weitere Hilfsmatrix definieren:

$$\underline{D} := (\underline{M}_{22} - \underline{M}_{21} \underline{M}_{11}^{-1} \underline{M}_{12}) \quad (4.12)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (4.10), (4.11) und (4.12) läßt sich $\underline{D}$ umformen zu

$$\underline{D} = (u_0 z_2^{-(n_2-1)} + u_1 z_2^{-(n_2-2)} + \dots + u_{n_2-2} z_2^{-1} + u_{n_2-1} z_2^0)^{-1} m.$$

Berücksichtigt man nun die Definitionen (4.6) und (4.5), so erhält man für obigen Ausdruck

$$\underline{D} = \frac{z_2^{(1-n_2)}}{g_{n_2}} g(z) \underline{1}_m. \quad (4.13)$$

Da die Matrizen $\underline{M}_{11}$ (vergl. (4.11)) und $\underline{D}$ offensichtlich invertierbar sind, kann die Formel A 4.1 auf $(z_2 \underline{1}_{mn_2} - \underline{S}_{22})$ angewendet werden. Hierfür benutze man die Blockmatrixdarstellung (4.10), die Inversionsformel A 4.1 und die Definition von $\underline{D}$ (4.12), und man erkennt

$$(z_2 \underline{1}_{mn_2} - \underline{S}_{22})^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \dots & \dots \\ \hline -1 & -1 \\ -\underline{D} & \underline{M}_{21} \underline{M}_{11} \end{array} \right]^{-1}.$$

Nun setzen wir die Ausdrücke (4.11), (4.10) explizit in diese neu gewonnene Darstellung ein und berücksichtigen die Definitionen (4.9b), (4.9c). Als Ergebnis bekommen wir den überraschend einfachen Ausdruck

$$\underline{S}_{12} (z_2 \underline{1}_{mn_2} - \underline{S}_{22})^{-1} \underline{S}_{21} = \underline{D} z_2^{1-n_2} (\underline{A}_0 + \underline{A}_1 z_2 + \dots + \underline{A}_{n_2-1} z_2^{n_2-1}).$$

Setzen wir jetzt noch die Beziehungen (4.13), (4.8), (4.7) und (4.6) in dieses Resultat ein, so wird durch entsprechende Umordnung der Terme und Vergleich mit (4.4) und (4.5) ersichtlich, daß

$$\underline{S}_{12} (z_2 \underline{1}_{mn_2} - \underline{S}_{22})^{-1} \underline{S}_{21} = \frac{\underline{P}}{g} - \underline{N}_{n_2}.$$

Im letzten Schritt setzen wir Gleichung (4.9a) ein und erhalten unter Berücksichtigung von (3.8)

$$\underline{S}_{11} + \underline{S}_{12} (z_2^{-1} \underline{m}_{n_2}^{-1} \underline{S}_{22}) \underline{S}_{21} = \frac{\underline{P}}{\underline{g}} = \underline{S}.$$

q.e.d.

Die im Satz 4.1 definierte Matrix

$$\underline{S}' = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{bmatrix}$$

ist rational in z_1 und erfüllt die Gleichung (4.3). Außerdem ist sie holomorph für $|z_1| > 1$, da das Hauptnennerpolynom von $\underline{S}'$ nur Faktoren des Polynoms $g_{n_2}(z_1)$ enthält und $g_{n_2}(z_1)$ ein AHHP ist (vergl. Satz 3.2).

Leider ist jedoch $\underline{S}'$ nicht diskret paraunitär, was mit Hilfe von (4.9) leicht nachgeprüft werden kann, und damit auch kein Element aus Ω_z . Deshalb wird nun im zweiten Schritt des Syntheseverfahrens die im Abschnitt 4.1 bereits erwähnte Ähnlichkeitstransformation durchgeführt, um eine diskret paraunitäre Streumatrix für das z_1 -abhängige Koppelnetzwerk zu erzeugen.

4.3 Zweiter Syntheseschritt

Aus der Theorie der Zustandsraumdarstellung ist bekannt, daß durch eine reguläre Transformation der Zustandsgrößen lediglich die innere Struktur, aber nicht das äußere Verhalten eines Systems verändert wird. Diese Überlegungen können auch auf das vorliegende Problem angewendet werden, indem man zeigt, daß

$$\underline{S}''(z_1) = \begin{bmatrix} \underline{1}_m & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}(z_1) \end{bmatrix} \underline{S}'(z_1) \begin{bmatrix} \underline{1}_m & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}(z_1) \end{bmatrix}^{-1} \quad \begin{matrix} m \\ mn_2 \end{matrix} \quad (4.14)$$

als die Streumatrix eines Netzwerks N'' betrachtet werden kann, das nach Abschluß der letzten mn_2 Tore mit z_2^{-1} -Reflektanzen ein zweidimensionales m -Tor ergibt, das durch die Matrix $\underline{S}(z_1, z_2)$ beschrieben wird. Die Matrix $\underline{T}(z_1)$ sei rational in z_1 und regulär.

Damit $\underline{S}''$ obige Eigenschaft aufweist, ist es gemäß Kapitel 4.2 hinreichend, wenn ihre entsprechenden Blöcke eine Lösung von (4.3) sind.

Unter Berücksichtigung der Struktur (4.1) von $\underline{S}'$ und der Beziehung (4.14) definiere man

$$\underline{S}'' = \begin{bmatrix} \underline{S}'_{11} & \underline{S}'_{12} \\ \underline{S}'_{21} & \underline{S}'_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ mn_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \underline{T}^{-1} \\ \underline{T} \underline{S}_{21} & \underline{T} \underline{S}_{22} \underline{T}^{-1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m \\ mn_2 \end{matrix} \quad (4.15)$$

wodurch eine bestimmte Blockaufteilung der Matrix $\underline{S}''$ festgelegt wird.

Durch Vergleich der entsprechenden Matrixblöcke in (4.15) und aufgrund der Regularität von $\underline{T}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{s}'_{11} + \underline{s}'_{12} (z_2^{1mn_2} - \underline{s}'_{22})^{-1} \underline{s}'_{21} &= \underline{s}_{11} + \underline{s}_{12} \underline{T}^{-1} (z_2^{1mn_2} - \underline{T} \underline{s}_{22} \underline{T}^{-1})^{-1} \underline{T} \underline{s}_{21} \\ &= \underline{s}_{11} + \underline{s}_{12} (z_2^{1mn_2} - \underline{s}_{22})^{-1} \underline{s}_{21}. \end{aligned}$$

Somit besitzt $\underline{s}''$ für jede beliebige reguläre Matrix $\underline{T}(z_1)$ die gewünschte Eigenschaft, da diese bereits für die Blockelemente von $\underline{s}'$ gezeigt wurde.

Die Transformationsmatrix $\underline{T}(z_1)$ soll im folgenden so bestimmt werden, daß

$$\underline{s}'' \begin{bmatrix} \underline{1}_{m+r} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{s}'' = \begin{bmatrix} \underline{1}_{m+r} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

wo r eine natürliche Zahl kleiner oder gleich mn_2 ist.

Die Vorteile einer solchen besonderen Transformation können erst an späterer Stelle vertieft werden.

Für die Berechnung dieser Matrix $\underline{T}$ in Abhängigkeit der Elemente von $\underline{s}'$ setzen wir nun die Gleichung (4.15) in (4.16) ein und vergleichen korrespondierende Matrixblöcke links und rechts des Gleichheitszeichens, wodurch wir folgendes Matrixgleichungssystem erhalten:

$$\underline{s}_{11} \underline{s}_{11} + \underline{s}_{12} \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{1}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{T}^{-1} \underline{s}_{12} = \underline{1}_m, \quad (4.17a)$$

$$\underline{T} \underline{s}_{21} \underline{s}_{11} + \underline{T} \underline{s}_{22} \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{1}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{T}^{-1} \underline{s}_{12} = \underline{0}, \quad (4.17b)$$

$$\underline{s}_{11} \underline{s}_{21} \underline{T} + \underline{s}_{12} \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{1}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{T}^{-1} \underline{s}_{22} \underline{T} = \underline{0}, \quad (4.17c)$$

$$\underline{T} \underline{S}_{21} \underline{S}_{21}^T + \underline{T} \underline{S}_{22} \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{1}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{T}^{-1} \underline{S}_{22}^T = \begin{bmatrix} \underline{1}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix}. \quad (4.17d)$$

Die Gleichungen (4.17b) und (4.17c) sind äquivalent, da beide zueinander diskret parakonjugiert sind. Zur Vereinfachung der Schreibweise definieren wir die Matrix

$$\underline{K} := \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{1}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{T}^{-1}, \quad (4.18)$$

wodurch das System (4.17) übergeht in

$$\underline{S}_{11} \underline{S}_{11} + \underline{S}_{12} \underline{K} \underline{S}_{12} = \underline{1}_m, \quad (4.19a)$$

$$\underline{S}_{21} \underline{S}_{11} + \underline{S}_{22} \underline{K} \underline{S}_{12} = \underline{0}, \quad (4.19b)$$

$$\underline{S}_{21} \underline{S}_{21} + \underline{S}_{22} \underline{K} \underline{S}_{22} = \underline{K}. \quad (4.19c)$$

Die Aufgabe besteht nun darin, eine rationale Matrix $\underline{K}$ zu finden, die erstens die Lösung des Gleichungssystems (4.19) ist und in die Struktur (4.18) zerlegt werden kann.

Untersuchungen an Matrizen mit niedrigem Grad führten zu dem überraschenden Ergebnis, daß eine Lösung des Gleichungssystems (4.19) explizit in Abhängigkeit der Größen (4.6) und (4.7) angebbar ist. Deshalb war zu vermuten, daß die gefundene Struktur der Lösungsmatrix für beliebigen Grad von $\underline{S}$ erweiterbar sei, was sich verhältnismäßig einfach durch Einsetzen des Lösungsansatzes in das Gleichungssystem (4.19) nachprüfen ließ.

Satz 4.2:

Die Matrix

$$K(z_1) := \begin{bmatrix} u_{1m} & u_{2m} & \dots & u_{n_2m} \\ u_{2m} & u_{3m} & & \\ u_{3m} & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ u_{n_2m} & & \underline{0} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1m} & u_{2m} & \dots & u_{n_2m} \\ u_{2m} & u_{3m} & & \\ u_{3m} & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \underline{0} \\ u_{n_2m} & & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{N}_1 & \underline{N}_2 & \dots & \underline{N}_{n_2} \\ \underline{N}_2 & \underline{N}_3 & & \\ \underline{N}_3 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \underline{0} \\ \underline{N}_{n_2} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{N}_1 & \underline{N}_2 & \dots & \underline{N}_{n_2} \\ \underline{N}_2 & \underline{N}_3 & & \\ \underline{N}_3 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \underline{0} \\ \underline{N}_{n_2} & & & \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

ist eine Lösung des Gleichungssystems (4.19), wo u_i und $\underline{N}_i$ durch (4.6) bzw. (4.7) gegeben sind.

Bevor jedoch dieser Satz bewiesen werden kann, sind ein Lemma und weitere Definitionen zur Vorbereitung notwendig. Diese basieren auf der Abhängigkeit der Größen u_i von den $\underline{N}_i$, $i = 0$ bis n_2 , aufgrund der diskreten Paraunitarität von $\underline{S}(z)$. Setzt man nämlich in die Gleichung (3.6) die Definitionen (4.4) und (4.5) ein und berücksichtigt die Beziehungen (4.6) bzw. (4.7), so erhält man

$$\underline{S} \underline{S} = \frac{\sum_{i=0}^{n_2} \underline{N}_i z_2^i}{\sum_{i=0}^{n_2} u_i z_2^i} \frac{\sum_{i=0}^{n_2} \underline{N}_i z_2^{n_2-i}}{\sum_{i=0}^{n_2} u_i z_2^{n_2-i}} = \underline{1}_m,$$

d.h.

$$\left(\sum_{i=0}^{n_2} \underline{N}_i z_2^i \right) \left(\sum_{i=0}^{n_2} \underline{N}_i z_2^{n_2-i} \right) = \left(\sum_{i=0}^{n_2} u_i \underline{1}_m z_2^i \right) \left(\sum_{i=0}^{n_2} u_i \underline{1}_m z_2^{n_2-i} \right).$$

Nach Ausmultiplikation der beiden Seiten in obiger Gleichung und Vergleich der Koeffiziententerme bei gleichen Potenzen von z_2 erhält man folgende Beziehungen:

$$\sum_{l=0}^{n_2-j} (u_l u_{l+j} \underline{1}_m - \underline{N}_l \underline{N}_{l+j}) = 0 \quad \forall \quad j = 0, \dots, n_2, \quad (4.21)$$

$$\sum_{l=i}^{n_2} (u_l u_{l-i} \underline{1}_m - \underline{N}_l \underline{N}_{l-i}) = 0 \quad \forall \quad i = 0, \dots, n_2. \quad (4.22)$$

Die $(m \times m)$ -Blockelemente, der durch (4.20) definierten Matrix $\underline{K}$ werden mit

$$\underline{K}_{ij} = \sum_{l=i}^{\min(n_2, n_2+i-j)} (u_l u_{l+j-i} \underline{1}_m - \underline{N}_l \underline{N}_{l+j-i}), \quad i, j=1, \dots, n_2 \quad (4.23)$$

bezeichnet.

Für die weiteren Betrachtungen ist es nützlich, noch folgende Hilfsgrößen zu definieren:

$$\underline{R}_{ij} := \sum_{l=i}^{\min(n_2, n_2+i-j)} (u_l u_{l+j-i} \underline{1}_m - \underline{N}_l \underline{N}_{l+j-i}), \quad i, j=0, \dots, n_2. \quad (4.24)$$

Lemma 4.1:

Für die durch (4.24) definierten Größen gilt

$$\underline{R}_{ij} = \begin{cases} \underline{K}_{ij} & \text{für } i, j = 1, 2, \dots, n_2 \\ \underline{0} & \text{für } i=0, j=0, 1, \dots, n_2 \\ \underline{0} & \text{für } j=0, i=0, 1, \dots, n_2 \end{cases} \quad (4.25)$$

Beweis:

Die Gültigkeit von (4.25) für $i, j=1, \dots, n_2$ wird durch Vergleich von (4.23) mit (4.24) ersichtlich. $\underline{R}_{0j} = \underline{0}$ wird durch Vergleich von (4.24) mit (4.21) und $\underline{R}_{i0} = \underline{0}$ durch Vergleich von (4.24) mit (4.22) deutlich.

q.e.d.

Außerdem benötigen wir noch die Beziehung

$$\underline{R}_{ij} = \underline{R}_{i+1, j+1} + u_i \underline{u}_j \underline{1}_m^{-N_i} \underline{N}_j, \quad i, j=0, \dots, n_2-1, \quad (4.26)$$

die durch Einsetzen der Definition (4.24) in (4.26) und unter Berücksichtigung von

$$\underline{R}_{i+1, j+1} = \sum_{l=i+1}^{\min(n_2, n_2+i-j)} (u_l \underline{u}_{l+j-i} \underline{1}_m^{-N_l} \underline{N}_{l+j-i}), \quad i, j=0, \dots, n_2-1,$$

leicht nachgeprüft werden kann.

Beweis zu Satz 4.2:

Die Gültigkeit des Satzes 4.2 soll nun dadurch nachgewiesen werden, indem die durch (4.20) definierte Matrix $\underline{K}$ in das Gleichungssystem (4.19) eingesetzt und die Gleichheit von linker Seite (l.S.) und rechter Seite (r.S.) des Systems gezeigt wird.

i) Betrachtung der Gleichung (4.19a)

(4.9a) und (4.9c) in die linke Seite der Gleichung (4.19a) eingesetzt ergibt

$$l.S. = \underline{N}_{n_2} \underline{N}_{n_2} + \underline{K}_{n_2 n_2},$$

und mit (4.23) und (4.6) erhält man

$$l.S. = \underline{N}_{n_2} \underline{N}_{n_2} + \underline{1}_m - \underline{N}_{n_2} \underline{N}_{n_2} = \underline{1}_m = r.S.$$

q.e.d.

ii) Betrachtung der Gleichung (4.19b)

(4.9) in die linke Seite der Gleichung (4.19b) eingesetzt und Anwendung des Lemmas 4.1 ergibt für das (mxm) -Blockelement der Position $(i+1)$

$$(l.S.)_{i+1} = \underline{A}_i \underline{N}_{n_2} + \underline{R}_{i n_2}^{-u_i} \underline{K}_{n_2 n_2}, \quad i=0, \dots, n_2-1,$$

und mit (4.8), (4.24) und (4.23) erhält man

$$(l.S.)_{i+1} = \underline{N}_i \underline{N}_{n_2}^{-\underline{N}_{n_2}} \underline{N}_{n_2} u_i + u_i \underline{u}_{n_2} \underline{1}_m - \underline{N}_i \underline{N}_{n_2} - u_i \underline{u}_{n_2} \underline{1}_m + u_i \underline{N}_{n_2} \underline{N}_{n_2}, \quad i=0, \dots, n_2-1,$$

d.h.

$$l.S. = \underline{0} = r.S.,$$

da $u_{n_2}=1$.

q.e.d.

iii) Betrachtung der Gleichung (4.19c)

(4.9) in die linke Seite der Gleichung (4.19c) eingesetzt und Anwendung des Lemmas 4.1 ergibt für das (mxm) -Blockelement der Position $(i+1, j+1)$

$$(l.S.)_{i+1, j+1} = \underline{A}_i \underline{A}_j + \underline{R}_{i j}^{-u_i} \underline{R}_{n_2, j}^{-\underline{R}_{i, n_2}} \underline{u}_j + \\ + u_i \underline{u}_j \underline{R}_{n_2 n_2}, \quad i, j=0, \dots, n_2-1,$$

und mit (4.8), (4.26), (4.24) und (4.6) erhält man

$$\begin{aligned}
 (1.S.)_{i+1,j+1} = & \tilde{N}_i \tilde{N}_j^{-u_i} \tilde{N}_{n_2} \tilde{N}_j^{-u_j} \tilde{N}_i \tilde{N}_{n_2}^{+u_i} \tilde{u}_j \tilde{N}_{n_2} \tilde{N}_{n_2} + \\
 & + \tilde{R}_{i+1,j+1}^{+u_i} \tilde{u}_j \tilde{1}_m \tilde{N}_i \tilde{N}_j^{-u_i} (\tilde{u}_j \tilde{1}_m \tilde{N}_{n_2} \tilde{N}_j) - \\
 & - (u_i \tilde{1}_m \tilde{N}_i \tilde{N}_{n_2}) \tilde{u}_j + u_i \tilde{u}_j (\tilde{1}_m \tilde{N}_{n_2} \tilde{N}_{n_2}), \quad i, j = 0, \dots, n_2 - 1,
 \end{aligned}$$

d.h.

$$(1.S.)_{i+1,j+1} = \tilde{R}_{i+1,j+1} = \tilde{K}_{i+1,j+1} = (r.S.)_{i+1,j+1}, \quad i, j = 0, \dots, n_2 - 1.$$

q.e.d.

Nachdem die Gültigkeit von Satz 4.2 bewiesen wurde, kann man stets eine Lösung für das Gleichungssystem (4.19) angeben. Nun muß noch gezeigt werden, daß $\underline{K}(z_1)$ auch in die Form (4.18) zerlegt werden kann, wozu $\underline{K}$ bestimmte Eigenschaften aufweisen muß.

Zunächst untersuche man die Eigenwerte der Matrix $\underline{S}_{22}$ aus (4.9d).

Durch Vertauschung von Zeilen und Spalten der Matrix $(\lambda \underline{1}_{mn_2} - \underline{S}_{22})$ läßt sie sich in folgende Form bringen, ohne den Wert ihrer Determinante zu verändern:

$$\underline{V} (\lambda \underline{1}_{mn_2} - \underline{S}_{22}) \underline{V}^{-1} = \text{diag} (\underline{L}, \dots, \underline{L}),$$

1 ... m

mit

$$\underline{L} = \lambda \underline{1}_{n_2} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -u_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -u_1 \\ 0 & 1 & & 0 & -u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -u_{n_2-1} \end{bmatrix}$$

und $\underline{V}$ eine Permutationsmatrix.

Somit erhalten wir

$$\det(\lambda \underline{1}_{mn_2} - \underline{S}_{22}) = \det \operatorname{diag}(\underline{L}, \dots, \underline{L}) = (\det \underline{L})^m.$$

Da $\det \underline{L}$ das charakteristische Polynom der Begleitmatrix von $\frac{g}{g_{n_2}}$ ist, so folgt

$$\det(\lambda \underline{1}_{mn_2} - \underline{S}_{22}) = (\det \underline{L})^m = \left(\frac{g(z_1, \lambda)}{g_{n_2}(z_1)} \right)^m. \quad (4.27)$$

Das Polynom $g(z_1, \lambda)$ ist laut Voraussetzung ein AHHP, das gemäß Satz 3.1 höchstens endlich viele Nullstellen auf dem Hypereinheitskreis besitzt, d.h.

$$g(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = 0 \quad (4.28)$$

für höchstens endlich viele Punkte $\underline{\omega}$. Die Werte von ω_1 , für die Gleichung (4.28) erfüllt ist, werden zur endlichen Menge Ω_1 zusammengefaßt, d.h.

$$g(e^{j\omega_1}, \lambda) \neq 0 \quad \forall \quad \omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \Omega_1 \quad \text{und} \quad |\lambda| \geq 1. \quad (4.29)$$

Die Gültigkeit dieser Beziehung für $|\lambda| > 1$ folgt aus Satz 3.2.

Die Aussage (4.29) kann nun so interpretiert werden, daß alle Eigenwerte λ_i ($i=1, \dots, mn_2$) der Matrix $\underline{S}_{22}(e^{j\omega_1})$ im Inneren des Einheitskreises liegen, falls $\omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \Omega_1$. Jetzt betrachte man die Gleichung (4.19c) für $z_1 = e^{j\omega_1}$, die als verallgemeinerte Lyapunov-Gleichung bezeichnet werden kann. Mit Hilfe des Kronecker-Produkts (siehe A 4.13) läßt sich diese Beziehung umformen, wobei auf Sätze in [16] verwiesen wird. Die Schreibweise $\operatorname{vec}(\underline{A})$ repräsentiert einen Spaltenvektor, der durch Aneinanderketten der Spalten von $\underline{A}$ gebildet wird, d.h.

$$\text{vec}(\underline{A}) = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_2 \\ \vdots \\ \underline{A}_n \end{bmatrix},$$

wo $\underline{A}_i$ die i-te Spalte der Matrix $\underline{A}$ ist. Die Zuordnung

$$\underline{A} \longleftrightarrow \text{vec}(\underline{A})$$

ist eineindeutig, falls die Ordnung von $\underline{A}$ gegeben ist.

Wendet man diese Spaltenoperation auf Gleichung (4.19c) an, so erhält man

$$\text{vec}(\underline{S}_{21}(e^{j\omega_1})\underline{S}_{21}^*(e^{j\omega_1}) + \underline{S}_{22}(e^{j\omega_1})\underline{K}(e^{j\omega_1})\underline{S}_{22}^*(e^{j\omega_1})) = \text{vec}(\underline{K}(e^{j\omega_1}))$$

und mit A 4.2

$$\text{vec}(\underline{S}_{21}(e^{j\omega_1})\underline{S}_{21}^*(e^{j\omega_1})) = (\underline{1} - (\underline{S}_{22}^*(e^{j\omega_1}))^T \otimes \underline{S}_{22}(e^{j\omega_1})) \text{vec}(\underline{K}(e^{j\omega_1})),$$

d.h.

$$\text{vec}(\underline{K}(e^{j\omega_1})) = (\underline{1} - (\underline{S}_{22}^*(e^{j\omega_1}))^T \otimes \underline{S}_{22}(e^{j\omega_1})^{-1}) \text{vec}(\underline{S}_{21}(e^{j\omega_1})\underline{S}_{21}^*(e^{j\omega_1})).$$

Die Gleichung (4.19c) besitzt somit für $z_1 = e^{j\omega_1}$ eine eindeutige Lösung $\underline{K}(e^{j\omega_1})$, falls die Matrix $(\underline{1} - (\underline{S}_{22}^*(e^{j\omega_1}))^T \otimes \underline{S}_{22}(e^{j\omega_1}))$ regulär ist.

Mit A 4.3 folgt jedoch für die Eigenwerte μ_1 dieser Koeffizientenmatrix

$$\mu_1 = 1 - \lambda_i^* \lambda_j, \quad i, j = 1, \dots, mn_2,$$

wo λ_i der i-te Eigenwert von $\underline{S}_{22}(e^{j\omega_1})$ ist. Für $\omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \Omega_1$ gilt

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \dots, mn_2,$$

wodurch

$$\mu_1 \neq 0 \quad \text{für } \omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \Omega_1.$$

Die Gleichung (4.19c) besitzt somit eine eindeutige Lösung für $z_1 = e^{j\omega_1}$, $\omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \Omega_1$. Da die in (4.20) definierte Matrix $\underline{K}(z_1)$ eine Lösung von (4.19c) ist, so ist sie für die angegebenen Punkte sogar eine eindeutige Lösung von (4.19c).

Satz 4.3:

Die in Satz 4.2 definierte Matrix $\underline{K}(z_1)$ ist diskret paragerade und nichtnegativ definit hermitesch für $z_1 = e^{j\omega_1}$.

Beweis:

$\underline{K}(z_1) = \underline{K}(z_1)$ aufgrund der gewählten Struktur. Als nächstes betrachte man die Gleichung

$$\begin{aligned} \underline{s}_{21}\underline{s}_{21}^* + \underline{s}_{22} \left(\sum_{i=0}^n \underline{s}_{22}^i \underline{s}_{21} \underline{s}_{21}^* \underline{s}_{22}^{*i} \right) \underline{s}_{22}^* - \\ - \sum_{i=0}^n \underline{s}_{22}^i \underline{s}_{21} \underline{s}_{21}^* \underline{s}_{22}^{*i} = \underline{s}_{22}^{n+1} \underline{s}_{21} \underline{s}_{21}^* \underline{s}_{22}^{*n+1}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Es ist bekannt [17], daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{s}_{22}^n = \underline{0} \quad (4.31)$$

genau dann, wenn alle Eigenwerte von $\underline{s}_{22}$ im Inneren des Einheitskreises liegen. Dies ist aber für $z_1 = e^{j\omega_1}$, $\omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \Omega_1$, der Fall. Läßt man somit in Gleichung (4.30) n gegen unendlich streben, so erhält man für $z_1 = e^{j\omega_1}$, $\omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \Omega_1$,

$$\underline{s}_{21}\underline{s}_{21}^* + \underline{s}_{22} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \underline{s}_{22}^i \underline{s}_{21} \underline{s}_{21}^* \underline{s}_{22}^{*i} \right) \underline{s}_{22}^* - \sum_{i=0}^{\infty} \underline{s}_{22}^i \underline{s}_{21} \underline{s}_{21}^* \underline{s}_{22}^{*i} = 0. \quad (4.32)$$

Die Konvergenz der unendlichen Summe wird durch die erwähnte Lage der Eigenwerte von $\underline{s}_{22}$ für die angegebenen Punkte garantiert (siehe A 4.14).

Vergleicht man nun (4.32) mit (4.19c) und berücksichtigt die Eindeutigkeit der Lösung von (4.19c), für $z_1 = e^{j\omega_1}$, $\omega_1 \in |\mathbb{R} \setminus \Omega_1|$, so erhält man

$$\underline{K} = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{s}_{22}^i \underline{s}_{21} \underline{s}_{21}^* \underline{s}_{22}^{*i} \quad \text{für } z_1 = e^{j\omega_1}, \omega_1 \in |\mathbb{R} \setminus \Omega_1|. \quad (4.32b)$$

$\underline{K}(e^{j\omega_1})$ ist somit offensichtlich nichtnegativ definit hermitesch für $\omega_1 \in |\mathbb{R} \setminus \Omega_1|$, d.h., alle Eigenwerte sind reell und größer oder gleich null. Sei $\underline{x}$ ein beliebiger konstanter Spaltenvektor und

$$\underline{y}(\omega_1) = \underline{x}^* \underline{K}(e^{j\omega_1}) \underline{x},$$

dann ist

$$\underline{y}(\omega_1) \geq 0 \quad \forall \quad \omega_1 \in |\mathbb{R} \setminus \Omega_1|.$$

Andererseits ist aber $\underline{y}(\omega_1)$ eine stetige Funktion von ω_1 und kann daher nicht ausschließlich für isolierte Punkte negativ werden, d.h.

$$\underline{y}(\omega_1) \geq 0 \quad \forall \quad \omega_1 \in |\mathbb{R}|.$$

Da $\underline{x}$ beliebig gewählt werden darf, so ist $\underline{K}(e^{j\omega_1})$ nichtnegativ definit für alle $\omega_1 \in |\mathbb{R}|$.

q.e.d.

Die bislang noch beliebige natürliche Zahl r (vergl.(4.16)) wird im folgenden durch

$$r := \text{rank } \underline{K}(z_1) \quad (4.33)$$

bestimmt.

Aufgrund der in Satz 4.3 gezeigten Eigenschaften der rationalen Matrix $\underline{K}(z_1)$ kann, etwa mit Hilfe des im Anhang A 6 vorgestellten Verfahrens, eine Faktorisierung

$$\underline{K}(z_1) = \underline{D}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{G} & \underline{G} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ r \\ r \end{matrix} \underline{D}^{-1} \quad (4.34)$$

durchgeführt werden, so daß $\underline{D}(z_1)$ eine unimodulare Polynommatrix in z_1 ist und $\underline{G}(z_1)$ und $\underline{G}^{-1}(z_1)$ rationale, reguläre $(r \times r)$ -Matrizen repräsentieren, welche beide für $|z_1| > 1$ holomorph sind (vergl. A 6).

Zusammenfassend läßt sich also feststellen:

$$\text{i) } \text{rank } \underline{G} = r, \quad (4.35)$$

$$\text{ii) } \det \underline{D} = \text{const.}, \quad (4.36)$$

$$\text{iii) } \underline{G} \text{ und } \underline{G}^{-1} \text{ sind holomorph für } |z_1| > 1. \quad (4.37)$$

Nun schreiben wir die Gleichung (4.34) in der Form

$$\underline{K} = \underline{D}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{G} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{1}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{G} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix} \underline{D}^{-1} \quad (4.38)$$

und setzen

$$\underline{T}^{-1} = \underline{D}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{G} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix}, \quad \underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{G}^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix} \underline{D}, \quad (4.39)$$

wodurch $\underline{T}$ und $\underline{T}^{-1}$ rationale, reguläre Matrizen darstellen, welche beide für $|z_1| > 1$ holomorph sind, da $\underline{G}$ und $\underline{G}^{-1}$ die gleichen Eigenschaften besitzen und $\underline{D}$ unimodular ist. Setzen wir jetzt noch

(4.39) in Gleichung (4.38) ein, so ergibt sich

$$\underline{K} = \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{1}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{T}^{-1},$$

wodurch $\underline{K}$ in die Form (4.18) übergeführt ist.

Nachdem nun die Existenz der gesuchten Transformationsmatrix $\underline{T}$ geklärt ist, sollen jetzt die besonderen Eigenschaften der in (4.14) definierten Matrix $\underline{S}''$ untersucht werden. Hierzu teilen wir $\underline{S}''$ erneut in Blöcke auf und erinnern uns an die Struktur (4.15):

$$\underline{S}'' = \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} & \underline{F}_{13} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} & \underline{F}_{23} \\ \underline{F}_{31} & \underline{F}_{32} & \underline{F}_{33} \end{bmatrix} & \begin{matrix} m \\ r \\ mn_2-r \end{matrix} & = \begin{bmatrix} \underline{S}'_{11} & \underline{S}'_{12} \\ \underline{S}'_{21} & \underline{S}'_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ mn_2 \end{matrix} \\ m & r & mn_2 \end{array} \quad (4.40)$$

Des weiteren definieren wir

$$\underline{S}''' := \begin{bmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Durch Einsetzen von (4.40) und (4.41) in (4.16) erhalten wir

$$\underline{S}''' \underline{S}''' = \underline{1}_{m+r} \quad (4.42)$$

$$(\underline{F}_{31} \quad \underline{F}_{32}) \begin{bmatrix} \underline{F}_{31} \\ \underline{F}_{32} \end{bmatrix} = \underline{0},$$

d.h.

$$(\underline{F}_{31} \quad \underline{F}_{32}) \equiv \underline{0}. \quad (4.43)$$

Dieses letzte Ergebnis kann für eine Reduzierung des Bauelementaufwandes benutzt werden. Bislang mußten mn_2 Tore des Netzwerkes N'' mit z_2 -abhängigen reaktiven Elementen beschaltet werden. Setzt man jedoch die Gleichungen (4.40) und (4.43) in die Beziehung

$$\underline{S} = \underline{S}'_{11} + \underline{S}'_{12} (z_2^{-1} \underline{m} n_2 - \underline{S}'_{22})^{-1} \underline{S}'_{21}$$

ein und berücksichtigt die spezielle Struktur der auftretenden Matrizen, so ergibt sich

$$\underline{S} = \underline{F}_{11} + (\underline{F}_{12} \underline{F}_{13}) (z_2^{-1} \underline{m} n_2 - \begin{bmatrix} \underline{F}_{22} & \underline{F}_{23} \\ 0 & \underline{F}_{33} \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} \underline{F}_{21} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{S} = \underline{F}_{11} + \underline{F}_{12} (z_2^{-1} r - \underline{F}_{22})^{-1} \underline{F}_{21}. \quad (4.44)$$

Ein Vergleich dieses Resultats mit der Forderung (4.3) läßt erkennen, daß die in (4.41) definierte Matrix $\underline{S}'''(z_1)$ als Streumatrix eines $(m+r)$ -Tors N''' aufgefaßt werden kann, das nach Abschluß der letzten r Tore mit z_2^{-1} -Reflektanzen ein zweidimensionales m -Tor ergibt, das durch die vorgegebene Streumatrix $\underline{S}(z)$ beschrieben wird.

Des weiteren wird aufgrund von (4.14) deutlich, daß $\underline{S}''$, und damit auch die Blockmatrix $\underline{S}'''$, rational in z_1 und holomorph für $|z_1| > 1$ ist, da dies auch für $\underline{S}'$, $\underline{T}$ und $\underline{T}^{-1}$ gilt. Berücksichtigt man jetzt noch die diskrete Paraunitarität der Matrix $\underline{S}'''$ (vergl. (4.42)), so wird ihre Zugehörigkeit zur Menge Ω_z offensichtlich (vergl. Definition 3.3). Das Syntheseproblem wäre somit gelöst, denn $\underline{S}'''(z_1)$ kann nun mit bekannten Methoden (vergl. A 5) realisiert werden. Offen blieb jedoch die Frage nach dem notwendigen Bauelementaufwand, der von r und dem McMillan-Grad (A 4.4) der Matrix $\underline{S}'''$ abhängt. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels wendet sich diesem Problem zu.

Zur Vorbereitung der nächsten Beweisschritte soll die Analogie zwischen dem gewählten Ansatz (4.9) für die Streumatrix $\underline{S}'$ des Koppelnetzwerks N' und der Zustandsraumdarstellung zeitdiskreter Systeme aufgezeigt werden. Dies ist zwar für die weiteren Ausführungen nicht notwendig, fördert aber das tiefere Verständnis der zu-

grundeliegenden Zusammenhänge.

Die durch Bild 4.2 definierten Größen können wie folgt interpretiert werden:

$\underline{a}$	Eingangsvektor
$\underline{b}$	Ausgangsvektor
$\underline{a}'$	Zustandsvektor
$\underline{b}' = z_2 \underline{a}'$	
$\underline{S}_{22}$	Systemmatrix
$\underline{S}_{21}$	Eingangsmatrix
$\underline{S}_{12}$	Ausgangsmatrix
$\underline{S}_{11}$	Durchgangsmatrix

$$\underline{b}' = \underline{S}_{22} \underline{a}' + \underline{S}_{21} \underline{a} \quad (4.45a)$$

$$\underline{b} = \underline{S}_{12} \underline{a}' + \underline{S}_{11} \underline{a} \quad (4.45b)$$

Die z_2^{-1} -Reflektanzen werden als Verzögerungen interpretiert, während sie im korrespondierenden Analognetzwerk als Kapazitäten realisiert werden. Diese verschiedenen Betrachtungsweisen stellen im Prinzip nichts anderes als das Konzept von Wellendigitalfiltern [22] dar, worauf aber in diesem Zusammenhang nicht näher eingegangen werden soll.

Für die Zustandsraumdarstellung (4.45) wird nun die Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{C}(z_1) := (\underline{S}_{21}, \underline{S}_{22}\underline{S}_{21}', \dots, \underline{S}_{22}^{mn_2-1} \underline{S}_{21}) \quad (4.46)$$

und die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\underline{\sigma}(z_1) := (\underline{S}_{12}^T, \underline{S}_{22}^T \underline{S}_{12}^T, \dots, \underline{S}_{22}^{mn_2-1} \underline{S}_{12}^T)^T \quad (4.47)$$

definiert [15, Kapitel 1.7].

Satz 4.4:

Der Normalrang der Steuerbarkeitsmatrix $\underline{C}$ ist größer oder gleich dem Normalrang der in (4.20) definierten Matrix $\underline{K}$, d.h.

$$r = \text{rank } \underline{K} \leq \text{rank } \underline{C} . \quad (4.48)$$

Beweis:

Sei q der Normalrang der in (4.46) definierten Matrix $\underline{C}(z_1)$. Mit Hilfe elementarer linksseitiger Operationen, d.h. durch Multiplikation mit einer geeigneten unimodularen Matrix $\underline{Q}(z_1)$, läßt sich $\underline{C}(z_1)$ stets in folgende Form transformieren [13, Kapitel 6.3]

$$\underline{Q} \underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} q \\ mn_2 - q \end{matrix} . \quad (4.49)$$

Die Elemente der rationalen Matrix $\underline{X}$ dürfen beliebige Werte annehmen.

Aufgrund des Satzes von Cayley Hamilton [23, Kapitel 4.3] ist $\underline{S}_{22}^i$ für $i \geq mn_2$ eine Linearkombination der Matrizen $\underline{1}$, $\underline{S}_{22}$, $\underline{S}_{22}^2$, ..., $\underline{S}_{22}^{mn_2-1}$. Deshalb erhält man aufgrund von (4.46) und (4.49) stets folgende Struktur

$$\underline{Q} \underline{S}_{22}^i \underline{S}_{21} = \begin{bmatrix} \underline{X}_i \\ \underline{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} q \\ mn_2 - q \end{matrix} , \quad i=0,1,2,\dots, \quad (4.50)$$

wobei die Elemente der Matrix $\underline{X}_i$ im folgenden ohne Belang sind.

Die Form (4.50) ist für $z_1 = e^{j\omega_1}$, $\omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \Omega_1$, auch für den Grenzfall $i \rightarrow \infty$ gültig, denn für diese Punkte gilt aufgrund von (4.31)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q \underline{S}_{22}^i \underline{S}_{21} = 0.$$

Unter Benutzung der Struktur (4.50) erhält man aus (4.32b)

$$\begin{aligned} Q \underline{K} Q^* &= \sum_{i=0}^{\infty} Q \underline{S}_{22}^i \underline{S}_{21} \underline{S}_{21}^* \underline{S}_{22}^{*i} Q^* \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \underline{X}_i \underline{X}_i^* & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} q \\ mn_2 - q \\ q \quad mn_2 - q \end{matrix} \quad \text{für } z_1 = e^{j\omega_1}, \omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \Omega_1. \end{aligned}$$

Da die unimodulare Matrix $Q(z_1)$ stets regulär ist, so folgt aus obiger Beziehung

$$l\text{-rank } \underline{K} \leq q \quad \text{für } z_1 = e^{j\omega_1}, \omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \Omega_1. \quad (4.51)$$

Die Ungleichung (4.51) ist für unendlich viele Punkte gültig und somit auch für den Normalrang, d.h.

$$\text{rank } \underline{K}(z_1) \leq q = \text{rank } \underline{C}(z_1).$$

q.e.d.

Wie bereits erwähnt, hängt die Anzahl der z_2 -abhängigen Bauelemente von r ab, d.h. vom Normalrang der Matrix $\underline{K}$. Das Ziel der weiteren Ausführungen ist die Bestimmung dieses Ranges.

Satz 4.5:

Der Normalrang der in (4.20) definierten Matrix $\underline{K}$ ist gleich dem Teilgrad n_2 des Polynoms g , d.h.

$$\text{rank } \underline{K} = n_2. \quad (4.52)$$

Beweis:

Man definiere die unendliche Menge Ω_2 , die alle Punkte ω_{10} enthält, für die

$$\text{i)} \quad w(z_2) := g(e^{j\omega_{10}}, z_2) \neq 0 \quad \text{für alle } |z_2| = 1, \text{ d.h.} \\ w(z_2) \text{ ist gemäß Satz 3.2 ein AHHP.}$$

$$\text{ii)} \quad \deg w(z_2) = n_2.$$

Ω_2 ist unendlich, da sie bis auf einzelne isolierte Punkte der Menge $|\mathbb{R}|$ entspricht (vergl. Satz 3.2). Im weiteren sei ω_{10} ein fester Punkt aus der Menge Ω_2 .

Friert man z_1 an dem Punkt $e^{j\omega_{10}}$ ein, so ist die Matrix

$$\underline{W}(z_2) := \underline{S}(e^{j\omega_{10}}, z_2) = \frac{\underline{P}(e^{j\omega_{10}}, z_2)}{w(z_2)}$$

ein Element aus Ω_z , denn

$$\text{i)} \quad \underline{W}(z_2) \text{ ist rational in } z_2,$$

$$\text{ii)} \quad \underline{W}(z_2) \text{ ist aufgrund von Satz 3.2 holomorph für } |z_2| > 1,$$

$$\text{iii)} \quad \underline{W} \underline{W} = \underline{S}(e^{j\omega_{10}}, z_2) \underline{S}(e^{j\omega_{10}}, z_2) = \underline{1}.$$

Des weiteren gilt

$$\det \underline{W}(z_2) = \sigma_w \frac{w(z_2) z_2^{n_2}}{w(z_2)},$$

wo σ_w eine unimodulare Konstante ist. Da $w(z_2)$ mit $w(z_2) z_2^{n_2}$ teilerfremd ist ($w(z_2)$ ist ein AHHP!) und $\underline{W}(z_2) \in \Omega_z$, so gilt laut A 4.5 für den McMillan-Grad von $\underline{W}(z_2)$

McMillan-Grad von $\underline{W}(z_2) = \deg w(z_2) = n_2$.

Da die Matrix $\underline{W}(z_2)$ nur von einer Variablen abhängt, läßt sie sich stets als die Streumatrix eines eindimensionalen, verlustlosen m-Tors realisieren (vergl. A 5). Der McMillan-Grad von $\underline{W}(z_2)$ ist gleich n_2 , wodurch das zugehörige Netzwerk mit n_2 reaktiven Bauelementen aufgebaut werden kann (vergl. A 5). Unter Verwendung von Gyrotoren und idealen Übertragern lassen sich anschließend alle reaktiven Elemente jeweils als Kapazität mit der Admittanz p_2 realisieren und aus dem Netzwerk herausziehen. Übrig bleibt ein konstantes Koppelnetzwerk, das durch die Streumatrix

$$\underline{W}' := \begin{bmatrix} \underline{W}_{11} & \underline{W}_{12} \\ \underline{W}_{21} & \underline{W}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ n_2 \end{matrix}$$

m n₂

beschrieben wird. Aufgrund der gleichen Überlegungen wie zu Beginn von Kapitel 4.2 muß zwischen $\underline{W}'$ und $\underline{W}$ der Zusammenhang

$$\underline{W} = \underline{W}_{11} + \underline{W}_{12} (z_2 \mathbb{1}_{n_2} - \underline{W}_{22})^{-1} \underline{W}_{21} \quad (4.53)$$

erfüllt sein.

Die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} \underline{W}_{22} \\ z_2 \end{pmatrix}$ sind betragsmäßig kleiner als eins, falls $|z_2| > |\mu_{\max}|$, wo $\mu_{\max}$ der größte Eigenwert von $\underline{W}_{22}$ ist. Daher kann die rechte Seite von (4.53) in der Nachbarschaft des Punktes $z_2 = \infty$ als Potenzreihe geschrieben werden, wobei die Konvergenz durch A 4.7 gewährleistet wird:

$$\underline{S}(e^{j\omega_{10}}, z_2) = \underline{W}(z_2) = \underline{W}_{11} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\underline{W}_{12} \underline{W}_{22}^i \underline{W}_{21}}{z_2^{i+1}}, \text{ für } |z_2| > |\mu_{\max}|. \quad (4.54)$$

Ebenso läßt sich eine konvergente Potenzreihe für die rechte Seite von (4.3) angeben, falls $|z_2| > |\lambda_{\max}|$, wo $\lambda_{\max}$ der größte Eigenwert von $S_{22}(e^{j\omega_{10}})$ ist:

$$\underline{s}(e^{j\omega_{10}}, z_2) = \underline{s}_{11}(e^{j\omega_{10}}) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\underline{s}_{12}(e^{j\omega_{10}}) \underline{s}_{22}^i(e^{j\omega_{10}}) \underline{s}_{21}(e^{j\omega_{10}})}{z_2^{i+1}},$$

(4.55)

für $|z_2| > |\lambda_{\max}|$.

Vergleicht man nun (4.54) mit (4.55), so erkennt man, daß die rechten Seiten der beiden Gleichungen für $|z_2| > \max(|\lambda_{\max}|, |\mu_{\max}|)$ gleich sein müssen, d.h. für ein zusammenhängendes Gebiet in der z_2 -Ebene. Deshalb müssen auch die Koeffizientenmatrizen aller Potenzen von z_2 gleich sein, d.h.

$$\underline{w}_{12} \underline{w}_{22}^i \underline{w}_{21} = \underline{s}_{12}(e^{j\omega_{10}}) \underline{s}_{22}^i(e^{j\omega_{10}}) \underline{s}_{21}(e^{j\omega_{10}}) \quad \forall i = 0, 1, \dots \quad (4.56)$$

Man definiere nun die Matrizen

$$\underline{C}' := (\underline{w}_{21}, \underline{w}_{22} \underline{w}_{21}, \dots, \underline{w}_{22}^{mn_2-1} \underline{w}_{21}), \quad (4.57)$$

$$\underline{C}' := (\underline{w}_{12}^T, \underline{w}_{22}^T \underline{w}_{12}^T, \dots, \underline{w}_{22}^{mn_2-1} \underline{w}_{12}^T)^T. \quad (4.58)$$

Mit (4.46), (4.47), (4.57), (4.58) und (4.56) erhält man die Beziehung

$$\underline{\sigma}(e^{j\omega_{10}}) \underline{C}(e^{j\omega_{10}}) = \underline{\sigma}' \underline{C}'.$$

Da der Rang von $\underline{C}'$ kleiner oder gleich n_2 sein muß, so folgt

$$1\text{-rank } \underline{\sigma}(e^{j\omega_{10}}) \underline{C}(e^{j\omega_{10}}) = \text{rank } \underline{\sigma}' \underline{C}' \leq n_2. \quad (4.59)$$

Setzt man (4.9c) und (4.9d) in (4.47) ein, so erhält man

$$1\text{-rank } \underline{Q}(e^{j\omega_{10}}) = mn_2. \quad (4.60)$$

Sylvesters-Ungleichung [13, A.18] angewandt auf die links in (4.59) auftretende Matrix ergibt

$$1\text{-rank } \underline{Q}(e^{j\omega_{10}}) + 1\text{-rank } \underline{C}(e^{j\omega_{10}}) - mn_2 \leq 1\text{-rank } \underline{Q}(e^{j\omega_{10}}) \underline{C}(e^{j\omega_{10}}),$$

und mit (4.59) und (4.60) erhält man

$$1\text{-rank } \underline{C}(e^{j\omega_{10}}) \leq n_2.$$

Da diese Ungleichung für alle ω_{10} aus der unendlichen Menge Ω_2 gültig ist und der Lokalrang einer rationalen Matrix nur für endlich viele Punkte vom Normalrang abweichen kann, so folgt

$$\text{rank } \underline{C}(z_1) \leq n_2$$

und mit (4.48)

$$r \leq n_2.$$

Wäre $r < n_2$, so würde man mit Hilfe der Beziehungen (4.41) und (4.44) eine Realisierung für $\underline{S}(e^{j\omega_{10}}, z_2)$ finden, die weniger als n_2 reaktive Bauelemente benötigt, was jedoch einen Widerspruch ergibt (vergl. A 4.7), somit gilt

$$r = \text{rank } \underline{K} = n_2. \quad (4.61)$$

q.e.d.

Satz 4.6:

Die Determinante der Matrix $\underline{S}'''(z_1)$ lautet

$$\det \underline{S}'''(z_1) = \frac{(-1)^{n_2+1} \sigma \, g_{n_2}(z_1) \, z_1^{n_1}}{g_{n_2}(z_1)} .$$

Beweis:

Zunächst sollen einige Sätze über Determinanten und Minoren zusammengefaßt werden, die für den weiteren Beweis notwendig sind. Eine ausführliche Darstellung dieser Zusammenhänge findet man in [24].

- i) Die Determinante der Summe zweier Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ kann als die Summe von Produkten von je einem Minor von $\underline{A}$ und einem von $\underline{B}$ ausgedrückt werden.
- ii) Die Formel von Binet-Cauchy [23, Kapitel 1.2] zeigt, daß ein Minor des Produkts zweier Matrizen als die Summe von Produkten von je zwei Minoren der beiden Matrizen ausgedrückt werden kann.
- iii) Jeder Minor einer Inversen $\underline{A}^{-1}$ [23, Kapitel 1.4] kann als Quotient aus einem Minor von $\underline{A}$ und $\det \underline{A}$ geschrieben werden.

Wendet man nun die Sätze i) bis iii) auf Gleichung (4.44) an und berücksichtigt (4.61), so folgt unmittelbar

$$\det \underline{S} = \frac{\text{Polynom in } z_2 \text{ mit rationalen Koeffizienten in } z_1}{\det (z_2 \, \underline{1}_{n_2} - \underline{F}_{22})} . \quad (4.62)$$

Andererseits gilt für die Determinante von $\underline{S}$ laut Voraussetzung (3.7)

$$\det \underline{S} = -\sigma \frac{g_{z_1}^{n_1} z_2^{n_2}}{g} . \quad (4.63)$$

Durch Vergleich von (4.62) mit (4.63) findet man

$$-\sigma \frac{g_{z_1}^{n_1} z_2^{n_2}}{g} = \frac{\text{Polynom in } z_2 \text{ mit rationalen Koeffizienten in } z_1}{\det(z_2 \underline{1}_{n_2} - \underline{F}_{22})} .$$

Da der linke Ausdruck in obiger Gleichung irreduzibel ist und $\frac{g}{g_{n_2}}$ und $\det(z_2 \underline{1}_{n_2} - \underline{F}_{22})$ zwei Polynome gleichen Grades in z_2 mit rationalen Koeffizienten in z_1 sind, wo der Koeffizient der höchsten Potenz von z_2 gleich eins ist, so folgt

$$\frac{g}{g_{n_2}} = \det(z_2 \underline{1}_{n_2} - \underline{F}_{22}) . \quad (4.64)$$

Nun muß noch ein Ausdruck für die Determinante von $\underline{S}'''$ gefunden werden, wozu die Gleichung (4.41) betrachtet wird:

$$\det \underline{S}''' = \lim_{z_2 \rightarrow 0} \det \begin{bmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & (\underline{F}_{22} - z_2 \underline{1}_{n_2}) \end{bmatrix} .$$

Für die Determinante von Blockmatrizen kann die Gleichung A 4.8 benutzt werden, somit folgt für obigen Ausdruck

$$\det \underline{S}''' = \lim_{z_2 \rightarrow 0} \det (\underline{F}_{22} - z_2 \underline{1}_{n_2}) \det (\underline{F}_{11} + \underline{F}_{12} (z_2 \underline{1}_{n_2} - \underline{F}_{22})^{-1} \underline{F}_{21}) .$$

Setzt man jetzt Gleichung (4.44) ein und benutzt die Beziehungen (4.63) und (4.64), so erhält man

$$\det \underline{S}''' = \lim_{z_2 \rightarrow 0} (-1)^{n_2} \frac{g}{g_{n_2}} (-\sigma) \frac{g^{n_1} z_1^{n_2}}{g},$$

d.h.

$$\det \underline{S}''' = (-1)^{n_2+1} \sigma \frac{g_{n_2}^{n_1} z_1}{g_{n_2}}.$$

q.e.d.

Wie aus Satz 3.2 hervorgeht, besitzt $g_{n_2}(z_1)$ den Grad n_1 , d.h., das eindimensionale Koppelnetzwerk N''' , das durch $\underline{S}'''(z_1)$ beschrieben wird, ist mit n_1 reaktiven Bauelementen realisierbar (vergl. A 5).

Für die Synthese von N''' kann entweder das vorgestellte Verfahren nochmals angewandt werden, wobei nun z_1 die Rolle von z_2 übernimmt, oder jedes andere bekannte Verfahren. Nach Abschluß der letzten n_2 Tore von N''' mit z_2^{-1} -Reflektanzen erhält man das gewünschte zweidimensionale Netzwerk N , das durch $\underline{S}$ beschrieben wird.

Um zu erkennen, daß es sich tatsächlich um eine minimale Realisierung handelt, geht man von der Existenz einer Schaltung mit weniger als n_2 z_2 -abhängigen Reaktanzen aus. Ersetzt man in diesem Netzwerk die z_1^{-1} -Reflektanzen durch konstante $e^{-j\omega_{10}}$ -Reflektanzen, $\omega_{10} \in \Omega_2$, so wird das resultierende eindimensionale Netzwerk durch $\underline{S}(e^{j\omega_{10}}, z_2)$ beschrieben. Im Beweis zu Satz 4.5 wurde jedoch bereits gezeigt, daß jede Realisierung von $\underline{S}(e^{j\omega_{10}}, z_2)$ mindestens n_2 reaktive Elemente erfordert, was aber einen Widerspruch zur Voraussetzung bedeutet.

Mit der gleichen Argumentationsweise kann auch gezeigt werden, daß n_1 die minimale Zahl z_1 -abhängiger Bauelemente in jeder Realisierung von $\underline{S}$ darstellt.

4.4 Zusammenfassung des Syntheseverfahrens

Die Einfachheit des vorgestellten Syntheseverfahrens für zweidimensionale Reaktanzmehrtore wird durch teilweise lange und komplizierte Herleitungen verschleiert. Deshalb werden nachfolgend die einzelnen Schritte stichpunktartig zusammengefaßt.

Ausgangspunkt ist eine Matrix $\underline{S}(z_1, z_2) \in \Omega_z$.

1) $\underline{S}$ in die Form

$$\underline{S} = \frac{\underline{P}}{\underline{g}}$$

bringen, mit

$$\det \underline{S} = -\sigma \frac{\overset{n_1}{\underset{g}{z_1}} \overset{n_2}{z_2}}{g}.$$

2) Die Matrix $\underline{S}'(z_1)$ mit Hilfe der Formeln (4.1) und (4.9) aufstellen.

3) Die rationale Matrix $\underline{K}(z_1)$ gemäß Gleichung (4.20) berechnen.

4) $\underline{K}$, mit Hilfe des in A 6 angegebenen Verfahrens, in ein Produkt

$$\underline{K} = \underline{D}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{G} & \underline{G} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{D}^{-1}$$

zerlegen, wo $\underline{D}$ eine unimodulare Polynommatrix ist und $\underline{G}$ und $\underline{G}^{-1}$ regulär, rational und für $|z_1| > 1$ holomorph sind.

5) Die Matrix

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{G}^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix} \underline{D}$$

berechnen.

6) Anschließend führe man die Transformation

$$\underline{S}'' = \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T} \end{bmatrix} \underline{S}' \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}''' & \begin{bmatrix} \underline{F}_{13} \\ \underline{F}_{23} \end{bmatrix} \\ \underline{0} & \underline{F}_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} m+n_2 \\ m+n_2 \end{matrix}$$

durch.

7) $\underline{S}'''(z_1)$ mit n_1 reaktiven Elementen realisieren.

8) Dieses Koppelnetzwerk N''' an den letzten n_2 Toren mit z_2^{-1} -Reflektanzen abschließen.

5. Testverfahren für zweidimensionale Hurwitzpolynome

Beim Entwurf zweidimensionaler Systeme tritt das Problem auf, die Stabilität von Übertragungsfunktionen zu untersuchen, die beispielsweise durch ein Optimierungsverfahren nach vorgegebenem Toleranzschema gewonnen wurden. Für die Lösung dieser Aufgabenstellung ist es meist nötig zu untersuchen, ob das Nennerpolynom der vorgegebenen Übertragungsfunktion zu einer bestimmten Klasse von Hurwitzpolynomen gehört. Im Zusammenhang mit der Synthese von Wellendigitalfiltern haben die sogenannten Haupt-Hurwitzpolynome [12] eine entscheidende Bedeutung erlangt. Andere Entwurfsverfahren basieren auf der BIBO-Eigenschaft (bounded input, bounded output) des zu realisierenden Systems, wofür das Nennerpolynom noch strengeren Kriterien genügen muß [26, Kapitel 1.2], hierbei spielt die Klasse der "Hurwitzpolynome im strengen Sinne" (A 1.4) eine wichtige Rolle.

Deshalb ist es nicht verwunderlich, daß diesen Problemen große Aufmerksamkeit geschenkt wurde. So haben sich verschiedene Autoren mit Testverfahren für Hurwitzpolynome im strengen Sinne bzw. für die entsprechenden Polynome im $\underline{z}$ -Bereich beschäftigt [40 - 46, 48], während diskrete Haupt-Hurwitzpolynome bislang nur von Fettweis und Basu untersucht wurden [47]. Das eine der beiden zuletzt genannten Verfahren basiert auf einer Erweiterung eines Tests für Hurwitzpolynome im strengen Sinne und das andere auf dem Konzept der sog. "inner matrix" eines Polynoms. In Kapitel 5.1 wird nun eine alternative Methode vorgestellt, um solche zweidimensionalen Haupt-Hurwitzpolynome zu testen. Das neu entwickelte Verfahren basiert auf der allgemeinen Synthese zweidimensionaler Reaktanznetzwerke.

5.1 Testverfahren für zweidimensionale Haupt-Hurwitzpolynome

Das nachfolgend beschriebene Testverfahren ermöglicht es, ein vorgegebenes Polynom $a(p_1, p_2)$ daraufhin zu untersuchen, ob es zur Klasse der Haupt-Hurwitzpolynome gehört. Damit können aber ebenso AHHP's und diskrete Haupt-Hurwitzpolynome getestet werden, da diese durch eine entsprechende Transformation in ein Haupt-Hurwitzpolynom umgewandelt werden können. Man vergleiche hierzu Kapitel 3.2.2 und [14].

Satz 5.1:

Sei $a(\underline{p})$ ein Haupt-Hurwitzpolynom, so ist

$$A(\underline{p}) = \frac{a_*(\underline{p})}{a(\underline{p})} \in \Omega_{\underline{p}}.$$

Beweis:

Aufgrund von A 1.5 ist $A(\underline{p})$ holomorph für $\operatorname{Re} \underline{p} > 0$, rational in $\underline{p}$ und offensichtlich paraunitär, d.h. $A(\underline{p}) \in \Omega_{\underline{p}}$.

q.e.d.

Satz 5.2:

Ein Polynom $a(\underline{p})$ ist ein Haupt-Hurwitzpolynom, falls $a_*(\underline{p})$ mit $a(\underline{p})$ teilerfremd ist und

$$A(\underline{p}) = \frac{a_*(\underline{p})}{a(\underline{p})} \in \Omega_{\underline{p}}.$$

Beweis:

Aufgrund der Definition 3.1 und der Annahme bezüglich der Teilerfremdheit von a und a_* ist die rationale Funktion $A(\underline{p})$ eine sogenannte Allpaßfunktion [12] in irreduzibler Form. Gemäß Theorem 4 der Arbeit [12] muß deshalb $a(\underline{p})$ ein Haupt-Hurwitzpolynom sein.

q.e.d.

Nachdem nun die Voraussetzungen geschaffen sind, kann das eigentliche Testverfahren vorgestellt werden, das in Satz 5.3 zusammengefaßt ist.

Satz 5.3:

Ein zweidimensionales Polynom $a(p_1, p_2)$ mit den Teilgraden n_1 bzw. n_2 ist genau dann ein Haupt-Hurwitzpolynom, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) $a(\underline{p})$ und $a_*(\underline{p})$ sind teilerfremd.

ii) Sei

$$g(\underline{z}) = g_0(z_1) + g_1(z_1) z_2 + \dots + g_{n_2}(z_1) z_2^{n_2}$$

durch die Transformation (3.5) aus $a(\underline{p})$ hervorgegangen, dann ist

$$g_{n_2}(z_1) \neq 0 \quad \text{für } |z_1| \geq 1,$$

und die Matrix

$$\underline{M}(z_1) := \underline{B}_1(z_1) \underline{B}_1(z_1)^* - \underline{B}_2(z_1) \underline{B}_2(z_1)^*$$

ist nichtneg. definit hermitesch für $|z_1| = 1$, wo

$$\underline{B}_1(z_1) := \frac{1}{g_{n_2}} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \dots & g_{n_2} \\ g_2 & g_3 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ g_{n_2} & & & & \end{bmatrix},$$

$$\underline{B}_2(z_1) := \frac{1}{g_{n_2}} \begin{bmatrix} g_{n_2-1} & g_{n_2-2} & g_{n_2-3} & \cdot & \cdot & \cdot & g_0 \\ g_{n_2-2} & g_{n_2-3} & & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ \cdot & & g_0 & & \underline{0} & & \\ g_0 & & & & & & \end{bmatrix} .$$

Beweis:

Zunächst wird gezeigt, daß $a(p_1, p_2)$ ein Haupt-Hurwitzpolynom ist, wenn die Eigenschaften i) und ii) erfüllt sind.

Mit Hilfe der Transformation (3.5) bilde man das Polynom $g(\underline{z})$ aus $a(\underline{p})$ und anschließend die rationale Funktion

$$S(\underline{z}) = \frac{g_{n_1} z_1^{n_1} z_2^{n_2}}{g} = \frac{P(\underline{z})}{g(\underline{z})} ,$$

mit

$$P(\underline{z}) = z_1^{n_1} g_{n_2}(z_1) + z_1^{n_1} g_{n_2-1}(z_1) z_2 + \dots + z_1^{n_1} g_0(z_1) z_2^{n_2} .$$

$P(\underline{z})$ ist ein Polynom in z_2 mit Polynomkoeffizienten in z_1 .

$S(\underline{z})$ ist rational und diskret paraunitär, da

$$S \underline{S} = 1 .$$

Man bilde die Größen

$$u_i = \frac{g_i}{g_{n_2}} , \quad N_i = \frac{z_1^{n_1} g_{n_2-i}}{g_{n_2}} , \quad i=0, \dots, n_2 . \quad (5.1)$$

Dies ist stets möglich, da laut Voraussetzung

$$g_{n_2} \neq 0.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (4.8), (4.9) und den oben angegebenen Größen u_1 und N_1 konstruiere man die Matrix $\underline{S}'$ (4.1). Diese ist holomorph für $|z_1| \geq 1$, da laut Voraussetzung $g_{n_2}(z_1) \neq 0$ für $|z_1| \geq 1$. Außerdem berechne man mit (4.20) die Matrix $\underline{K}$, welche eine Lösung des Gleichungssystems (4.19) ist, da $S(\underline{z})$ diskret paraunitär ist und dies die einzige Voraussetzung war, die für den Beweis von Satz 4.2 benötigt wurde.

Durch Einsetzen der Größen (5.1) in (4.20) erkennt man sofort

$$\underline{K}(z_1) = \underline{B}_1 \underline{B}_1 - \underline{B}_2 \underline{B}_2 = \underline{M}(z_1).$$

$\underline{M}(z_1)$ ist laut Voraussetzung nichtnegativ definit für $|z_1| = 1$, wodurch $\underline{K}(z_1)$ in ein Produkt

$$\underline{K}(z_1) = \underline{D}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{G} & \underline{G} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{D}^{-1}$$

zerlegt werden kann (A 6). Wie in Kapitel 4.3 weiter beschrieben, berechne man die Matrix $\underline{T}$ und anschließend mit (4.14) die Matrix $\underline{S}''$. $\underline{S}''$ ist holomorph für $|z_1| > 1$, da $\underline{S}'$, $\underline{T}$ und $\underline{T}^{-1}$ diese Eigenschaften besitzen. Entsprechend Kapitel 4.3 erhält man demzufolge eine Matrix $\underline{S}'''(z_1)$, die ein Element aus Ω_z ist. Daher existiert ein Netzwerk N''' mit der Streumatrix $\underline{S}'''(z_1)$ (vergl. A 5). Schließt man die letzten r Tore mit z_2^{-1} -Reflektanzen ab, so erhält man ein zweidimensionales Reaktanzeintor N , das durch $S(\underline{z})$ beschrieben wird.

Die Reflektanz $A(\underline{p})$ von N im $\underline{p}$ -Bereich ist laut [12] ein Element aus Ω_p .

$A(p)$ erhält man mit Hilfe der Transformation (3.4) aus $S(\underline{z})$, d.h.

$$A(p) = S\left(\frac{1+p}{1-p}\right) = \frac{a_*(p)}{a(p)} \in \Omega_p.$$

Des weiteren ist laut Voraussetzung der Ausdruck

$$\frac{a_*(p)}{a(p)}$$

irreduzibel, wodurch mit Satz 5.2 die Hinlänglichkeit der Behauptung folgt.

Als nächstes ist der Umkehrschluß zu zeigen, d.h., jedes Haupt-Hurwitzpolynom $a(p_1, p_2)$ erfüllt die Bedingungen i) und ii).

zu i) Die Polynome a und a_* sind per Definition teilerfremd (vergl. A 1.5).

zu ii) Da $a(p)$ ein Haupt-Hurwitzpolynom ist, so ist gemäß Definition 3.2 $g(\underline{z})$ ein AHHP. Aus Satz 3.1 folgt unmittelbar

$$g_{n_2}(z_1) \neq 0 \quad \text{für} \quad |z_1| \geq 1.$$

Entsprechend Satz 5.1 ist

$$A(p) := \frac{a_*(p)}{a(p)}$$

ein Element aus Ω_p , weshalb gemäß Satz 3.2

$$S(\underline{z}) = A\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{g(\underline{z}) \quad z_1^{n_1} \quad z_2^{n_2}}{g(\underline{z})}$$

ein Element aus Ω_z ist.

Die weitere Vorgehensweise ist ähnlich wie oben beschrieben. Man bildet die Größen (5.1) und stellt durch Einsetzen in Gleichung (4.20) fest, daß

$$\underline{K}(z_1) = \underline{M}(z_1).$$

Gemäß Satz 4.3 ist $\underline{K}(z_1)$, und damit auch $\underline{M}(z_1)$, nichtnegativ definit hermitesch für $|z_1| = 1$.

q.e.d.

Satz 5.3 stellt somit notwendige und hinreichende Bedingungen dafür zur Verfügung, daß ein vorgegebenes zweidimensionales Polynom zur Klasse der Haupt-Hurwitzpolynome gehört.

Nun sollen noch einige Hinweise für die praktische Durchführung des Tests gegeben werden.

Zunächst betrachten wir die Teilerfremdheit von $a(\underline{p})$ und $a_*(\underline{p})$.

Hierzu bilden wir, entsprechend der Vorgehensweise im ersten Teil des Beweises von Satz 5.3, die rationale Funktion

$$S(\underline{z}) = A\left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1}\right) = \frac{a_*\left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1}\right)}{a\left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1}\right)} = \frac{\underline{g}(\underline{z}) \underline{z}_1^{n_1} \underline{z}_2^{n_2}}{\underline{g}(\underline{z})},$$

mit

$$\underline{g}(\underline{z}) = a\left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1}\right) (\underline{z}_1+1)^{n_1} (\underline{z}_2+1)^{n_2}, \quad (5.2a)$$

$$\underline{\tilde{g}}(\underline{z}) \underline{z}_1^{n_1} \underline{z}_2^{n_2} = a_*\left(\frac{\underline{z}-1}{\underline{z}+1}\right) (\underline{z}_1+1)^{n_1} (\underline{z}_2+1)^{n_2}. \quad (5.2b)$$

Aufgrund von (5.2) sind die beiden Polynome $\underline{g}(\underline{z})$ und $\underline{\tilde{g}}(\underline{z}) \underline{z}_1^{n_1} \underline{z}_2^{n_2}$ genau dann teilerfremd, wenn $a(\underline{p})$ und $a_*(\underline{p})$ teilerfremd sind. Gemäß den Gleichungen (4.48) und (4.61) ist der Normalrang der Matrix $\underline{K}$ gleich dem Teilgrad bezügl. $\underline{z}_2$ des Nennerpolynoms der Determinante der zu realisierenden Streumatrix $\underline{S}(\underline{z})$, falls $\det \underline{S}(\underline{z})$ in irreduzibler Form gegeben ist. Im vorliegenden Fall ist jedoch $\underline{S}(\underline{z})$ lediglich eine skalare Größe, d.h.

$$\det S(\underline{z}) = S(\underline{z}),$$

wodurch der Rang von $\underline{K}$ bzw. $\underline{M}$ gleich dem Teilgrad bezügl. z_2 des Nennerpolynoms von

$$S(\underline{z}) = \frac{g(\underline{z}) z_1^{n_1} z_2^{n_2}}{g(\underline{z})} \quad (5.3)$$

ist, falls $S(\underline{z})$ in irreduzibler Form geschrieben wird. Dieser ist kleiner als n_2 , wenn $g(\underline{z})$ und $g(\underline{z}) z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ einen gemeinsamen z_2 -abhängigen Faktor besitzen, und gleich n_2 , wenn $g(\underline{z})$ und $g(\underline{z}) z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ teilerfremd bezügl. z_2 sind. Aufgrund des Zusammenhangs (5.2) zwischen $g(\underline{z})$ und $a(\underline{p})$ und der Tatsache, daß $\underline{M}$ eine $(n_2 \times n_2)$ -Matrix ist, erhält man analog:

- i) $\det \underline{M} \equiv 0$, falls a und a_* einen gemeinsamen z_2 -abhängigen Faktor besitzen,
- ii) $\det \underline{M} \neq 0$, falls a und a_* keinen gemeinsamen z_2 -abhängigen Faktor besitzen.

Falls nun $g(\underline{z})$ und $g(\underline{z}) z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ einen gemeinsamen Faktor besitzen, der nur von z_1 abhängt, so muß dies auch ein gemeinsamer Faktor von $g_{n_2}(z_1)$ und $g_{n_2}(z_1) z_1^{n_1}$ sein. Aber $g_{n_2}(z_1) \neq 0$ für $|z_1| \geq 1$ und $g_{n_2}(z_1) z_1^{n_1} \neq 0$ für $|z_1| \leq 1$, wodurch sie keinen solchen gemeinsamen Faktor besitzen können.

Mit diesem Ergebnis läßt sich Satz 5.3 in einer leicht modifizierten Form wie folgt formulieren.

Satz 5.4:

Ein zweidimensionales Polynom $a(p_1, p_2)$ mit den Teilgraden n_1 bzw. n_2 ist genau dann ein Haupt-Hurwitzpolynom, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind, wobei die in Satz 5.3 definierten Größen verwendet werden:

- i) $g_{n_2}(z_1) \neq 0$ für $|z_1| \geq 1$,
- ii) $\det \underline{M}(z_1) \neq 0$,
- iii) $\underline{M}(z_1)$ ist nichtnegativ definit hermitesch für $|z_1| = 1$.

Der Test bezüglich der Definitheit von $\underline{M}(z_1)$ kann mit beliebigen bekannten Verfahren [35, 40], mit Determinantentests oder dem Faktorisierungsalgorithmus A 6 durchgeführt werden.

Beispiel:

$$a(p_1, p_2) = 1 + (1 + p_1) p_2 + (1 + p_1) p_2^2$$

$$g(z_1, z_2) = (1 + z_1) + 2(1 - z_1) z_2 + (1 + 5 z_1) z_2^2$$

$$g(z_1, z_2) = g_0 + g_1 z_2 + g_2 z_2^2$$

$$\text{i) } g_2(z_1) = 1 + 5 z_1 \neq 0 \quad \text{für} \quad |z_1| \geq 1$$

$$\text{ii) } \underline{M}(z_1) = \frac{1}{(z_1+5)(1+5z_1)} \begin{bmatrix} 4(z_1^2+6z_1+1) & 2(1-z_1)(2z_1+6) \\ 2(z_1-1)(2+6z_1) & 4(z_1^2+6z_1+1) \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{M}(1) = \left(\frac{16}{3}\right)^2 \rightarrow \det \underline{M}(z_1) \neq 0$$

iii) Sei

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2(z_1-1)(2+6z_1)}{4(z_1^2+6z_1+1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2(z_1+3+\sqrt{8})}{\sqrt{3+\sqrt{8}}(z_1+5)} & 0 \\ 0 & \frac{4(z_1+1)^2\sqrt{3+\sqrt{8}}}{(z_1+5)(z_1+3+\sqrt{8})} \end{bmatrix}.$$

so läßt sich leicht nachrechnen, daß

$$\underline{M}(z_1) = \underline{U}(z_1) \quad \underline{U}(z_1),$$

d.h., $\underline{M}$ ist nichtnegativ definit hermitesch für $|z_1| = 1$.

Somit ist $a(p_1, p_2)$ ein Haupt-Hurwitzpolynom.

5.2 Testverfahren für zweidimensionale Hurwitzpolynome im strengen Sinne

Ein Polynom $a(p_1, p_2)$ ist ein Hurwitzpolynom im strengen Sinne, falls

$$a(\underline{p}) \neq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} \underline{p} \geq 0,$$

vergl. A 1.4.

Satz 5.5:

Ein Polynom $a(p_1, p_2)$ ist genau dann ein Hurwitzpolynom im strengen Sinne, falls

- i) $a(\underline{p})$ ein Haupt-Hurwitzpolynom ist,
- ii) $h(p_2) := a(j\omega_{10}, p_2)$ ein Haupt-Hurwitzpolynom für alle $\omega_{10} \in \mathbb{R}$ ist.

Beweis:

Zunächst soll gezeigt werden, daß die Bedingungen hinreichend sind.

Falls $h(p_2)$ ein Haupt-Hurwitzpolynom ist, so entspricht es einem Hurwitzpolynom im klassischen Sinne [11, Korollar 1.3], d.h.

$$h(j\omega_2) \neq 0 \quad \text{für alle } \omega_2 \in \mathbb{R},$$

dies bedeutet jedoch

$$a(j\omega_1, j\omega_2) \neq 0 \quad \text{für alle } \underline{\omega} \in \mathbb{R}^2. \quad (5.4)$$

Da $a(\underline{p})$ ein Haupt-Hurwitzpolynom ist, so gilt außerdem (A 1.5)

$$a(\underline{p}) \neq 0 \quad \text{für } \operatorname{Re} \underline{p} > 0. \quad (5.5)$$

Die Aussagen (5.4) und (5.5) ergeben zusammen die Definition eines Hurwitzpolynoms im strengen Sinne.

Nun muß noch gezeigt werden, daß die Bedingungen i) und ii) notwendig sind. Sei $a(p_1, p_2)$ ein Hurwitzpolynom im strengen Sinne, so ist $a(\underline{p})$ auch ein Haupt-Hurwitzpolynom (A 1.6).

Des weiteren gilt dann laut Voraussetzung

$$h(p_2) = a(j\omega_{10}, p_2) \neq 0 \quad \text{für } \operatorname{Re} p_2 \geq 0,$$

d.h., $h(p_2)$ ist ein Hurwitzpolynom im strengen Sinne (A 1.4) und somit auch ein Haupt-Hurwitzpolynom (A 1.6).

q.e.d.

Der zweite Teil des Tests in Satz 5.5 könnte theoretisch mit dem in Kapitel 5.1 beschriebenen Verfahren für jeden Punkt $\omega_{10} \in \mathbb{R}$ durchgeführt werden.

Die in diesem Test für das Polynom $h(p_2)$ auftretenden Größen werden mit $g_{n_2}^h$ und $\underline{M}^h$ bezeichnet. Sie sind nicht mehr von z_1 abhängig, sondern konstant. Aufgrund der Bilineartransformation (3.4) und der Definition der diskreten Parakonjugation erhält man für den festen Punkt ω_{10}

$$g_{n_2}^h = g_{n_2} \left(\frac{1+j\omega_{10}}{1-j\omega_{10}} \right), \quad (5.6a)$$

$$\underline{M}^h = \underline{M} \left(\frac{1+j\omega_{10}}{1-j\omega_{10}} \right), \quad (5.6b)$$

wo $g_{n_2}(z_1)$ und $\underline{M}(z_1)$ die entsprechenden Größen für den Test von $a(\underline{p})$ sind. Gemäß Satz 5.4 ist $h(p_2)$ genau dann ein Haupt-Hurwitzpolynom, wenn gilt:

- i) $g_{n_2}^h \neq 0$,
- ii) $\det \underline{M}^h \neq 0$,
- iii) $\underline{M}^h$ ist positiv definit hermitesch.

Da aufgrund der Transformation

$$z_1 = \frac{1 + p_1}{1 - p_1}$$

jeder Punkt der $j\omega_1$ -Achse in der p_1 -Ebene eineindeutig auf einen Punkt des Einheitskreises in der z_1 -Ebene abgebildet wird, so sind obige Forderungen für alle Werte $\omega_{10} \in \mathbb{R}$ erfüllt, falls aufgrund der Beziehungen (5.6) gilt:

- i) $g_{n_2}(z_1) \neq 0$ für $|z_1| \geq 1$,
- ii) $\det \underline{M}(z_1) \neq 0$ für $|z_1| = 1$,
- iii) $\underline{M}(z_1)$ ist positiv definit hermitesch für $|z_1| = 1$.

Nimmt man jetzt noch die entsprechenden Forderungen des Satzes 5.4 für den Test des Polynoms $a(\underline{p})$ hinzu, so erhält man unter Berücksichtigung der Redundanz des Punktes ii) bezüglich iii) in obigen Aussagen:

Satz 5.6:

Ein Polynom $a(p_1, p_2)$ ist genau dann ein Hurwitzpolynom im strengen Sinne, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind, wobei die in Satz 5.3 definierten Größen verwendet werden:

- i) $g_{n_2}(z_1) \neq 0$ für $|z_1| \geq 1$,

ii) $\underline{M}(z_1)$ ist positiv definit hermitesch für $|z_1| = 1$.

Obwohl die Forderungen des Satzes 5.6 wesentlich strenger sind als jene des Satzes 5.4, sind erstere einfacher zu überprüfen, indem man die Stetigkeit der Nullstellen des charakteristischen Polynoms von $\underline{M}(z_1)$ berücksichtigt (vergl. [40]).

Wendet man das soeben geschilderte Verfahren auf eindimensionale Polynome $a(p)$ an, so liegen alle Nullstellen des zugehörigen Polynoms $g(z)$ im Innern des Einheitskreises, falls $a(p)$ ein Hurwitzpolynom im strengen Sinne ist. Für den Test solcher Polynome $g(z)$ wurde von Schur ein Verfahren entwickelt [49, 50], bei dem die Definitheit einer bestimmten hermiteschen Form überprüft werden muß. Interessanterweise ist die Formmatrix identisch mit der in Satz 5.3 definierten Matrix $\underline{M}$. Somit geht Satz 5.6 für eindimensionale Polynome in das Schur-Kriterium [49, §13.] über. Es wäre daher naheliegend, im zweidimensionalen Fall die Matrix $\underline{M}(z_1)$ als verallgemeinerte Schur-Matrix zu bezeichnen.

6. Synthese multidimensionaler Reaktanzmehrtore

6.1 Beweis für die Nichtexistenz eines allgemeinen Syntheseverfahrens

Im Kapitel 3.2 wurde die Frage aufgeworfen, ob zu jeder Matrix $\underline{A}(\underline{p}) \in \Omega_p$ eine konkret passive Schaltung gehört, so daß $\underline{A}(\underline{p})$ die Streumatrix dieses Netzwerkes darstellt. Für zweidimensionale Vertreter aus Ω_p konnte diese Frage in Kapitel 4 positiv beantwortet werden. Nun wird gezeigt, daß dies für k-dimensionale Matrizen $\underline{A}(\underline{p})$, mit $k \geq 3$, i.a. nicht mehr möglich ist.

Kurz ein Wort zur Notation. Die in diesem Kapitel verwendeten Formelzeichen sind teilweise identisch mit früher gewählten Ausdrücken, ohne jedoch die gleiche Bedeutung zu besitzen. Alle auftretenden Größen werden neu definiert.

Ausgangspunkt sei ein k-dimensionales Haupt-Hurwitzpolynom $a(\underline{p})$, mit

$$\deg_1 a(\underline{p}) = 1, \quad (6.1)$$

d.h.

$$a(\underline{p}_1, \underline{p}') = a_0(\underline{p}') + a_1(\underline{p}') p_1. \quad (6.2)$$

Gemäß Satz 5.1 ist

$$A(\underline{p}) := \frac{a_*(\underline{p})}{a(\underline{p})}$$

ein Element aus Ω_p , und mit (6.2) erhält man

$$A(\underline{p}) = \frac{a_{0*}(\underline{p}') - a_{1*}(\underline{p}') p_1}{a_0(\underline{p}') + a_1(\underline{p}') p_1}. \quad (6.3)$$

Man geht nun von der Existenz eines k-dimensionalen Reaktanzeintors N aus, dessen Reflektanz gleich $A(\underline{p})$ ist. Die p_1 -abhängigen reakti-

ven Bauelemente von N können mittels Gytratoren und idealen Übertragern stets in Kapazitäten mit der Admittanz p_1 umgewandelt werden. Zieht man nun alle diese transformierten p_1 -abhängigen Kapazitäten aus N heraus und trennt sie ab, so erhält man ein $(k-1)$ -dimensionales, verlustloses $(q+1)$ -Tor N' , wo q die Anzahl der p_1 -abhängigen Bauelemente in N ist (vergl. Bild 6.1). Die Streumatrix des Koppelnetzwerks N' sei $\underline{A}'(\underline{p}')$, sie hängt nur von $\underline{p}'$ ab und ist ein Element aus Ω_p .

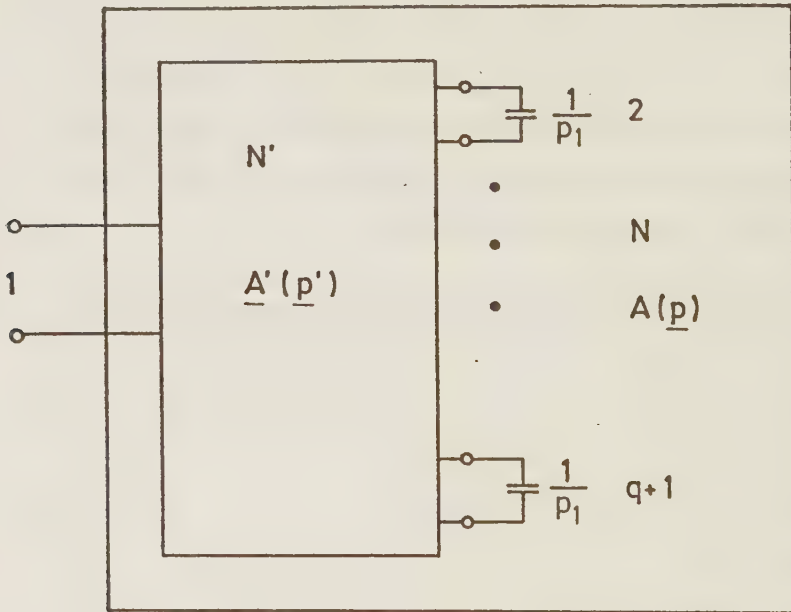


Bild 6.1

Die Streumatrix $\underline{A}$ wird nun in Blöcke aufgeteilt:

$$\underline{A}' = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ q \end{matrix}. \quad (6.4)$$

Wählt man die Torwiderstände R_2 bis R_{q+1} des Netzwerks N' gleich eins, so kann, aufgrund gleicher Überlegungen wie zu Beginn des Abschnitts 4.2, die Reflektanz $A(\underline{p})$ von N durch die Elemente von $\underline{A}'$ und die Reflektanzen der herausgezogenen Kapazitäten ausgedrückt werden:

$$A(\underline{p}_1, \underline{p}') = \underline{A}_{11}(\underline{p}') + \underline{A}_{12}(\underline{p}') \left(\frac{1+\underline{p}_1}{1-\underline{p}_1} \frac{1}{q} - \underline{A}_{22}(\underline{p}') \right)^{-1} \underline{A}_{21}(\underline{p}'). \quad (6.5)$$

Man definiere die Polynome

$$g_0(\underline{p}') := a_0(\underline{p}') - a_1(\underline{p}'), \quad (6.6a)$$

$$g_1(\underline{p}') := a_0(\underline{p}') + a_1(\underline{p}') = a(1, \underline{p}'), \quad (6.6b)$$

wobei $g_1(\underline{p}')$ ein Haupt-Hurwitzpolynom in $\underline{p}'$ ist, da $a(\underline{p})$ ebenfalls zu dieser Polynomklasse gehört (vergl. A 1.1).

Wie sich leicht nachprüfen läßt, erhält man nach geeigneter Umformung von (6.3) und unter Benutzung der Definitionen (6.6)

$$A(\underline{p}) = \frac{g_{0*}}{g_1} + \frac{1-\underline{p}_1}{1+\underline{p}_1} \left(1 + \frac{1-\underline{p}_1}{1+\underline{p}_1} \frac{g_0}{g_1} \right)^{-1} \frac{g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*}}{g_1^2} \quad (6.7)$$

und nach Vergleich mit (6.5)

$$A(\underline{p}) = \frac{g_{0*}}{g_1} + \frac{1-\underline{p}_1}{1+\underline{p}_1} \left(1 + \frac{1-\underline{p}_1}{1+\underline{p}_1} \frac{g_0}{g_1} \right)^{-1} \frac{g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*}}{g_1^2} =$$

$$\underline{A}_{11} + \frac{1-\underline{p}_1}{1+\underline{p}_1} \underline{A}_{12} \left(1 - \frac{1-\underline{p}_1}{1+\underline{p}_1} \underline{A}_{22} \right)^{-1} \underline{A}_{21}. \quad (6.8)$$

Für $p_1 = 1$ erkennt man durch Vergleich der linken mit der rechten Seite des obigen Ausdrucks

$$A_{11} = \frac{g_{0*}}{g_1} \quad (6.9)$$

und nach Einsetzen von (6.9) in (6.8)

$$\left(1 + \frac{1-p_1}{1+p_1} \frac{g_0}{g_1}\right)^{-1} \frac{g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*}}{g_1^2} = A_{12} \left(\frac{1}{g} - \frac{1-p_1}{1+p_1} A_{22}\right)^{-1} A_{21}. \quad (6.10)$$

Die Gleichung (6.10) geht für $p_1 = 1$ über in

$$A_{12} A_{21} = \frac{g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*}}{g_1^2}. \quad (6.11)$$

Da $\underline{A}'$ ein Element aus Ω_p ist, so kann die Paraunitaritätseigenschaft zur Gewinnung weiterer Beziehungen benutzt werden.

Aus $\underline{A}' \underline{A}'_* = \underline{1}$ und (6.4) folgt

$$A_{11} A_{11*} + A_{12} A_{12*} = 1, \quad (6.12)$$

und aus $\underline{A}'_* \underline{A}' = \underline{1}$ und (6.4) folgt

$$A_{11*} A_{11} + A_{21*} A_{21} = 1. \quad (6.13)$$

Setzt man (6.9) in (6.12) und (6.13) ein und vergleicht die entstehenden Ausdrücke, so erhält man

$$A_{12} A_{12*} = A_{21*} A_{21} = \frac{g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*}}{g_1 g_{1*}}. \quad (6.14)$$

Nun definiere man den rationalen Vektor

$$\underline{N}(p') := \underline{A}_{21} - \underline{A}_{12}^* \frac{g_1^*}{g_1} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_q \end{bmatrix} . \quad (6.15)$$

$$\underline{N}_* \underline{N} = (\underline{A}_{21}^* - \underline{A}_{12} \frac{g_1}{g_1^*}) (\underline{A}_{21} - \underline{A}_{12}^* \frac{g_1^*}{g_1}) \quad (6.16)$$

$$\underline{N}_* \underline{N} = \underline{A}_{21}^* \underline{A}_{21} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} \frac{g_1}{g_1^*} - \underline{A}_{21}^* \underline{A}_{12}^* \frac{g_1^*}{g_1} + \underline{A}_{12} \underline{A}_{12}^* \quad (6.17)$$

Einsetzen von (6.11) und (6.14) in Gleichung (6.17) führt zu dem wichtigen Resultat

$$\underline{N}_* \underline{N} = \sum_{i=1}^q N_i^* N_i \equiv 0 ,$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^q |N_i(j\omega')|^2 = 0 \quad (6.18)$$

und somit

$$N_i(p') = 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} p' = 0, i = 1, \dots, q.$$

Durch analytische Fortsetzung [20] erhält man schließlich

$$\underline{N} \equiv 0 ,$$

d.h.

$$\underline{A}_{21} = \underline{A}_{12}^* \frac{g_1^*}{g_1} . \quad (6.19)$$

Die Nennerausdrücke von $g_1 \underline{A}_{21}$ und $g_1 \underline{A}_{12}$ in irreduzibler Form sind jeweils Haupt-Hurwitzpolynome oder Konstanten, da $\underline{A}'$ stets als Quotient aus einer Polynommatrix und einem Haupt-Hurwitzpolynom geschrieben werden kann. Dies folgt aus der Tatsache, daß

$$\underline{A}' \in \Omega_p$$

und den in Abschnitt 3.2.1 genannten Eigenschaften.

Definiert man

$$\underline{P}_{21} := g_1 \underline{A}_{21}', \quad (6.20a)$$

so ist $\underline{P}_{21}$ aufgrund der erwähnten Eigenschaften entweder ein Polynomvektor, oder $\underline{P}_{21}$ besitzt eine Singularität in $\operatorname{Re} \underline{p}' < \underline{0}$ (vergl. A 1.7).

Andererseits hat

$$\underline{P}_{12*} := g_{1*} \underline{A}_{12*} \quad (6.20b)$$

aufgrund der gleichen Überlegungen keine Singularität in $\operatorname{Re} \underline{p}' < \underline{0}$ (vergl. A 1.5).

Gemäß (6.19) ist jedoch

$$\underline{P}_{21} = \underline{P}_{12*}, \quad (6.21)$$

wodurch $\underline{P}_{21}$ und $\underline{P}_{12}$ Polynomvektoren sein müssen.

Mit (6.20) und (6.14) erhalten wir

$$g_1 g_{1*} \Lambda_{21*} \Lambda_{21} = P_{21*} P_{21} = g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*},$$

und mit

$$P_{21} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_q \end{bmatrix}$$

ergibt sich

$$g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*} = \sum_{i=1}^q P_i P_i^*, \quad (6.22)$$

wobei die Größen P_i Polynome in p' sind. Man definiere

$$f_i(\underline{\omega}') := \operatorname{Re} P_i(j\underline{\omega}'), \quad (6.23a)$$

$$h_i(\underline{\omega}') := \operatorname{Im} P_i(j\underline{\omega}'), \quad (6.23b)$$

d.h.

$$P_i(j\underline{\omega}') = f_i(\underline{\omega}') + j h_i(\underline{\omega}').$$

Die Größen $f_i(\underline{\omega}')$ und $h_i(\underline{\omega}')$ sind offensichtlich reelle Polynome in $\underline{\omega}'$.

Für $\underline{p}' = j\underline{\omega}'$ erhält man mit (6.22) und (6.23)

$$g_1(j\underline{\omega}') g_{1*}(j\underline{\omega}') - g_0(j\underline{\omega}') g_{0*}(j\underline{\omega}') = \sum_{i=1}^q (f_i^2(\underline{\omega}') + h_i^2(\underline{\omega}')). \quad (6.24)$$

Somit stellt die Forderung, daß der Ausdruck

$$|g_1(j\omega')|^2 - |g_0(j\omega')|^2$$

als eine Summe von Quadraten reeller Polynome in ω' geschrieben werden kann, eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Reaktanzeintors N , mit der in (6.3) definierten Reflektanz $A(\underline{p})$, dar.

Der Beweis für die Nichtexistenz eines allgemeinen Syntheseverfahrens basiert auf der Konstruktion eines Gegenbeispiels, das die notwendige Bedingung (6.24) nicht erfüllt.

Zur Vorbereitung eines solchen Beispiels sind zunächst einige Hilfsätze nötig.

Lemma 6.1:

Sei

$$b(p_2, p_3) := 1 + (p_2 + p_3)^2 + \frac{1}{2} p_2^2 p_3^2$$

und

$$c(p_2, p_3) := \frac{1}{\sqrt{7}} (p_2 + p_3) (4 + 3p_2 p_3),$$

dann ist

$$F(p_2, p_3) = \frac{b(p_2, p_3)}{c(p_2, p_3)}$$

eine positive Funktion in irreduzibler Form.

Beweis:

Zunächst wird gezeigt, daß b und c teilerfremd sind.

Das Polynom c besitzt lediglich die beiden irreduziblen Faktoren

$$(p_2 + p_3)$$

und

$$(4 + 3p_2 p_3).$$

Falls nun b und c nicht teilerfremd sind, so muß b den Faktor

$$(p_2 + p_3)$$

oder

$$(4 + 3p_2 p_3)$$

besitzen. Aber $b(0,0) \neq 0$ und $b(1, -4/3) \neq 0$, d.h., b und c sind teilerfremd.

Nun wird die Variable p_3 an einem beliebigen Punkt p_{30} in der offenen rechten p_3 -Halbebene eingefroren, d.h.

$$p_{30} = \sigma + j\omega_{30},$$

mit

$$\sigma > 0. \quad (6.25)$$

Man definiere die rationale Funktion

$$F'(p_2) = \frac{b'(p_2)}{c'(p_2)} := F(p_2, p_{30}),$$

mit

$$b'(p_2) := b(p_2, p_{30})$$

$$c'(p_2) := c(p_2, p_{30}).$$

Die beiden Nullstellen von c' , $-p_{30}$ und $-\frac{4}{3p_{30}}$, 'liegen aufgrund von (6.25) in der linken offenen p_2 -Halbebene, d.h., c' ist ein Haupt-Hurwitzpolynom.

Nun wird das Verhalten von $F'(p_2)$ auf der $j\omega_2$ -Achse untersucht:

$$\operatorname{Re} F'(j\omega_2) = \operatorname{Re} \sqrt[7]{\frac{1 + (\sigma + j(\omega_2 + \omega_{30}))^2 + \frac{1}{2}(j\omega_2 \sigma - \omega_2 \omega_{30})^2}{(\sigma + j(\omega_2 + \omega_{30})) (4 + 3(j\omega_2 \sigma - \omega_2 \omega_{30}))}}.$$

Erweitert man Zähler und Nenner des obigen Ausdrucks mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners und führt die Realteilbildung durch, so erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F'(j\omega_2) = \sqrt{7} \sigma \frac{4(1+\sigma^2) + (\omega_2 + \omega_{30})^2 (1+\omega_2^2) +}{\sigma^2 (4 - 6\omega_2 \omega_{30} - 3\omega_2^2)^2 +} \dots \\ \dots \frac{+ \omega_2^4 (2 + \frac{3}{2} \sigma^2 + \frac{3}{2} \omega_{30}^2) + 3\omega_{30}^2 + \sigma^2 \omega_2^2}{+ ((\omega_2 + \omega_{30}) (4 - 3\omega_2 \omega_{30}) + 3\sigma^2 \omega_2)^2} . \end{aligned}$$

Da Zähler und Nenner des obigen Ausdrucks Summen von Quadraten reeller Zahlen sind und σ positiv ist, so gilt

$$\operatorname{Re} F'(j\omega_2) \geq 0 \quad \forall \quad \omega_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgrund der Definition von c' und b' erhält man

$$b' = (1 + p_{30}^2) + 2p_{30}p_2 + (1 + \frac{1}{2} p_{30}^2) p_2^2,$$

$$c' = \frac{1}{\sqrt{7}} (4p_{30} + (4 + 3p_{30}^2) p_2 + 3p_{30}p_2^2)$$

und mit $\operatorname{Re} p_{30} > 0$

$$\deg b' = \deg c' = 2.$$

Zusammenfassend läßt sich also feststellen:

- i) $c'(p_2)$ ist ein Haupt-Hurwitzpolynom,
- ii) $\operatorname{Re} F'(j\omega_2) \geq 0$,
- iii) $\deg c' = \deg b'$,
- iv) c und b sind teilerfremd.

Gemäß A 2.1 und den Punkten i) bis iii) ist $F'(p_2)$ eine positive Funktion, d.h.

$$\operatorname{Re} F'(p_2) = \operatorname{Re} F(p_2, p_{30}) \geq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} p_2 > 0.$$

Aber p_{30} konnte beliebig in der rechten offenen p_3 -Halbebene gewählt werden, wodurch

$$\operatorname{Re} F(p_2, p_3) \geq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(p_2, p_3) > 0,$$

d.h., $F(p_2, p_3)$ ist eine positive Funktion (A 2.2) und außerdem irreduzibel, da b und c teilerfremd sind.

q.e.d.

Lemma 6.2:

Man betrachte die Polynome

$$d(p_2, p_3) := \sqrt{\frac{2}{7}} p_2 + p_2^2 + \sqrt{\frac{2}{7}} (1 - p_2^2) p_3 + (1 - \sqrt{\frac{2}{7}} p_2 + \frac{1}{2} p_2^2) p_3^2,$$

$$e(p_2, p_3) := b(p_2, p_3) + c(p_2, p_3),$$

mit b und c aus Lemma 6.1.

Die rationale Funktion

$$U(p_2, p_3) := \frac{d(p_2, p_3)}{e(p_2, p_3)}$$

ist unimodular beschränkt, genauer

$$|U(p_2, p_3)| < 1 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(p_2, p_3) > 0.$$

Beweis:

Zunächst berechne man die Hilfsgröße

$$\varphi(p_2, p_3) := e e_* - d d_* = 1 - (p_2^2 + p_3^2 + 3) p_2^2 p_3^2, \quad (6.26)$$

$$\varphi(j\omega_2, j\omega_3) = 1 + (\omega_2^2 + \omega_3^2 - 3) \omega_2^2 \omega_3^2. \quad (6.27)$$

Wie sich durch Ausmultiplikation der Terme leicht nachprüfen läßt, erhält man nach geeigneter Umformung von (6.27)

$$\varphi(j\omega_2, j\omega_3) = (3 - (\omega_2^2 + \omega_3^2)) \left(\frac{\omega_2^2 - \omega_3^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2} - 1 \right)^2 (\omega_2^2 + \omega_3^2 + 1). \quad (6.28)$$

Aus (6.27) folgt

$$\varphi(j\omega_2, j\omega_3) > 0 \quad \text{für} \quad \omega_2^2 + \omega_3^2 \geq 3,$$

und aus (6.28) folgt

$$\varphi(j\omega_2, j\omega_3) \geq 0 \quad \text{für} \quad \omega_2^2 + \omega_3^2 \leq 3,$$

d.h.

$$\varphi(j\omega_2, j\omega_3) \geq 0 \quad \text{für} \quad (\omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.29)$$

(6.26) kombiniert mit (6.29) ergibt

$$\varphi(j\omega_2, j\omega_3) = |e(j\omega_2, j\omega_3)|^2 - |d(j\omega_2, j\omega_3)|^2 \geq 0. \quad (6.30)$$

Hieraus folgt für alle Punkte (ω_2, ω_3) , für die $e(j\omega_2, j\omega_3)$ ungleich null ist,

$$|U(j\omega_2, j\omega_3)| = \left| \frac{d(j\omega_2, j\omega_3)}{e(j\omega_2, j\omega_3)} \right| \leq 1. \quad (6.31)$$

Des weiteren ist

$$e = b + c$$

aufgrund von A 2.3 in Verbindung mit Lemma 6.1 ein Haupt-Hurwitz-polynom, d.h.

$$e(p_2, p_3) \neq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(p_2, p_3) > 0. \quad (6.32)$$

Berücksichtigt man jetzt A 3.2, (6.31), (6.32) und die Tatsache, daß $U(p_2, p_3)$ keine Konstante ist, so folgt

$$|U(p_2, p_3)| < 1 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(p_2, p_3) > 0.$$

q.e.d.

Lemma 6.3:

Die rationale Funktion

$$G(p_2, p_3) = \frac{1 + U(p_2, p_3)}{1 - U(p_2, p_3)}$$

ist eine positive Funktion, wobei U in Lemma 6.2 definiert ist.

Beweis:

$$\operatorname{Re} G = \frac{1}{2} (G + G^*) = \frac{1 - |U|^2}{1 - |U|^2},$$

und mit Lemma 6.2 folgt

$$\operatorname{Re} G(p_2, p_3) > 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(p_2, p_3) > 0.$$

q.e.d.

Satz 6.1:

Das dreidimensionale Polynom

$$a'(p_1, p_2, p_3) := (e(p_2, p_3) + d(p_2, p_3)) + (e(p_2, p_3) - d(p_2, p_3))p_1 \quad (6.33)$$

ist ein Haupt-Hurwitzpolynom, mit e und d aus Lemma 6.2.

Beweis:

Sei (p_{10}, p_{20}, p_{30}) eine Nullstelle des Polynoms a' , dann gilt

$$p_{10} = \frac{e(p_{20}, p_{30}) + d(p_{20}, p_{30})}{e(p_{20}, p_{30}) - d(p_{20}, p_{30})} = \frac{1 + U(p_{20}, p_{30})}{1 - U(p_{20}, p_{30})}$$

und unter Berücksichtigung von Lemma 6.3

$$p_{10} = -G(p_{10}, p_{20}),$$

d.h.

$$\operatorname{Re} p_{10} = -\operatorname{Re} G(p_{10}, p_{20}) \leq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(p_{20}, p_{30}) > 0.$$

Somit gilt

$$a'(p_1, p_2, p_3) \neq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(p_1, p_2, p_3) > 0.$$

Nun muß nur noch gezeigt werden, daß a' und a'_* teilerfremd sind.

Falls a' und a'_* einen gemeinsamen p_1 -abhängigen Faktor besitzen, dann gilt

$$\frac{e+d}{e-d} = -\frac{e_*+d_*}{e_*-d_*}.$$

Durch Ausmultiplikation läßt sich nachprüfen, daß dies nicht der Fall und somit ein Widerspruch zur Annahme ist.

Jeder gemeinsame p_1 -unabhängige Faktor ψ von a' und a'_* ist ein Faktor von $(e+d)$, $(e-d)$, (e_*+d_*) und (e_*-d_*) . Somit ist ψ ein gemeinsamer Faktor von $2e = (e+d) + (e-d)$ und $2e_* = (e_*+d_*) + (e_*-d_*)$. Aber gemäß dem Beweis zu Lemma 6.2 ist e ein Haupt-Hurwitzpolynom und damit teilerfremd mit e_* , d.h., ψ ist eine Konstante.

q.e.d.

Satz 6.2:

Man betrachte das k -dimensionale Polynom

$$a(p) = a'(p_1, p_2, p_3) \quad a''(p_4, \dots, p_k),$$

wo a' in Satz 6.1 definiert ist und $a''(p'')$ ein beliebiges Haupt-Hurwitzpolynom in $p'' = (p_4, \dots, p_k)$ ist.

Die rationale Funktion

$$A(p) = \frac{a_*(p)}{a(p)}$$

ist ein Element aus Ω_p und kann nicht als Reflektanz eines Reaktanzeintors interpretiert werden.

Beweis:

Da $(a'a'')$ aufgrund der Sätze 6.1 und A 1.3 ein Haupt-Hurwitzpolynom ist, so folgt aus Satz 5.1

$$A(p) \in \Omega_p.$$

Nun schreiben wir a als

$$a(p) = a_0(p') + a_1(p') p_1, \quad (6.34)$$

wo

$$p' = (p_2, p_3, p'')$$

und gemäß (6.33)

$$a_0(p') = (e(p_2, p_3) + d(p_2, p_3)) a''(p''),$$

$$a_1(p') = (e(p_2, p_3) - d(p_2, p_3)) a''(p'').$$

Dann ermitteln wir mit (6.6) die beiden Polynome

$$g_0(p') = 2d(p_2, p_3) a''(p''),$$

$$g_1(p') = 2e(p_2, p_3) a''(p'').$$

Zusammen mit (6.26) führt dieses Ergebnis zu

$$g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*} = 4a'' a''_* (e e_* - d d_*) = 4a'' a''_* \varphi(p_2, p_3).$$

Soll $A(p)$ als Reflektanz eines Netzwerks N interpretiert werden, so muß die notwendige Bedingung (6.24) erfüllt sein, d.h.

$$g_1(j\omega') g_{1*}(j\omega') - g_0(j\omega') g_{0*}(j\omega') =$$

$$4a''(j\omega'') a''_*(j\omega'') \varphi(j\omega_2, j\omega_3) = \sum_{i=1}^q (f_i^2(\omega') + h_i^2(\omega')).$$

Nun wird p'' bei $j\omega_0''$ so eingefroren, daß

$$a''(j\omega_0'') \neq 0,$$

d.h.

$$4|a''(j\omega_0'')|^2 \varphi(j\omega_2, j\omega_3) = \sum_{i=1}^q (f_i^2(\omega_2, \omega_3, \omega_0'') + h_i^2(\omega_2, \omega_3, \omega_0'')).$$

Die Funktion $\varphi(j\omega_2, j\omega_3)$ muß sich somit als Summe von Quadraten reeller Polynome in (ω_2, ω_3) schreiben lassen.

Es muß also aufgrund von (6.27) gelten

$$\begin{aligned} \varphi(j\omega_2, j\omega_3) &= 1 - 3\omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_2^4 \omega_3^2 + \omega_2^2 \omega_3^4 \\ &= \sum_{i=1}^{2q} [(u_{i0} + u_{i1}\omega_2 + u_{i2}\omega_2^2) + (u_{i3} + u_{i4}\omega_2 + u_{i5}\omega_2^2)\omega_3 + \\ &\quad + (u_{i6} + u_{i7}\omega_2 + u_{i8}\omega_2^2)\omega_3^2]^2, \end{aligned} \quad (6.35)$$

mit

$$u_{il} \in \mathbb{R}, \quad i = 1 \text{ bis } 2q, \quad l = 0 \text{ bis } 8.$$

Die reellen Konstanten u_{il} werden nun zu Vektoren zusammengefaßt:

$$u_l := \begin{bmatrix} u_{1l} \\ u_{2l} \\ \vdots \\ u_{2q,l} \end{bmatrix}, \quad l = 0 \text{ bis } 8,$$

d.h.

$$\underline{u}_1^T \underline{u}_k = \sum_{i=1}^{2q} u_{i1} u_{ik}.$$

Multipliziert man die rechte Seite von (6.35) aus und führt einen Koeffizientenvergleich mit der linken Seite durch, so erhält man unter Benutzung obiger Vektorschreibweise folgendes Gleichungssystem:

$$\omega_2^2: \quad 2 \underline{u}_0^T \underline{u}_2 + \underline{u}_1^T \underline{u}_1 = 0 \quad (6.36a)$$

$$\omega_2^4: \quad \underline{u}_2^T \underline{u}_2 = 0 \quad (6.36b)$$

$$\omega_3^2: \quad 2 \underline{u}_0^T \underline{u}_6 + \underline{u}_3^T \underline{u}_3 = 0 \quad (6.36c)$$

$$\omega_3^4: \quad \underline{u}_6^T \underline{u}_6 = 0 \quad (6.36d)$$

$$\omega_2^4 \omega_3^4: \quad \underline{u}_8^T \underline{u}_8 = 0 \quad (6.36e)$$

$$\omega_2^2 \omega_3^2: \quad 2 \underline{u}_0^T \underline{u}_8 + 2 \underline{u}_1^T \underline{u}_7 + 2 \underline{u}_2^T \underline{u}_6 + 2 \underline{u}_3^T \underline{u}_5 + \underline{u}_4^T \underline{u}_4 = -3. \quad (6.36f)$$

Mit (6.36b), (6.36d) und (6.36e) erhält man

$$\underline{u}_2 = \underline{u}_6 = \underline{u}_8 = \underline{0}. \quad (6.37)$$

Mit (6.36a) und (6.37) erhält man

$$\underline{u}_1 = \underline{0}. \quad (6.38a)$$

Mit (6.36c) und (6.37) erhält man

$$\underline{u}_3 = \underline{0}. \quad (6.38b)$$

Mit (6.37), (6.38) und (6.36f) ergibt sich

$$\underline{u}_4^T \underline{u}_4 = -3.$$

Dies ist offensichtlich ein Widerspruch, da $\underline{u}_4$ ein reeller, konstanter Vektor ist, d.h., $\varphi(j\omega_2, j\omega_3)$ läßt sich nicht in eine Summe von Quadraten reeller Polynome zerlegen, wodurch die Gleichung (6.24)

im vorliegenden Fall nicht erfüllt ist. Somit existiert kein konkret passives Eintor, dessen Reflektanz mit $A(\underline{p})$ identisch ist.

q.e.d.

Das Haupt-Hurwitzpolynom $a''(\underline{p})$ konnte in Satz 6.2 beliebig gewählt werden, d.h., es existieren zu jeder Dimension $k \geq 3$ Matrizen $A(\underline{p}) \in \Omega_p$, für die es keine Realisierungsmöglichkeit gibt. Diese Aussage gilt nicht nur für skalare Funktionen aus Ω_p , sondern auch für $(m \times m)$ -Matrizen, wie man leicht an folgendem Beispiel sieht.

Sei $A(\underline{p})$ wie in Satz 6.2 definiert, dann ist auch

$$\text{diag}(A(\underline{p}), \dots, A(\underline{p}))$$

ein Element aus Ω_p .

Würde es zu dieser Matrix eine Netzwerkrealisierung geben, so erhielte man nach Abschluß der letzten $(m - 1)$ Tore mit den jeweiligen Torwiderständen auch eine Realisierung für $A(\underline{p})$, was jedoch in Widerspruch zu Satz 6.2 steht.

Das Ergebnis des Satzes 6.2 überrascht nicht, da Hilbert [28] bereits 1888 zeigte, daß sich nicht alle positiv definiten Formen als Summe von Formenquadraten darstellen lassen. Durch das oben angeführte Beispiel wurde nun bewiesen, daß genau solche Polynome im Zusammenhang mit der Synthese multidimensionaler Reaktanzmehrtore auftreten können.

Die Arbeit von Hilbert [28] zeigt jedoch die Möglichkeit auf, für eine sehr beschränkte Klasse von dreidimensionalen Elementen aus Ω_p ein allgemeines Syntheseverfahren zu entwickeln. Laut [28] existiert für jedes positiv semidefinite homogene Polynom dreier unabhängiger Variablen eine Zerlegung in die Summe dreier Polynom-

quadrate, falls es sich höchstens um eine Form vierter Ordnung handelt. Die Zerlegung dreidimensionaler homogener Polynome ist jedoch äquivalent mit der Zerlegung allgemeiner zweidimensionaler Polynome [32], so daß jedes positiv semidefinite Polynom zweier Variablen in eine Summe von Polynomquadraten zerlegt werden kann, falls der Gesamtgrad kleiner gleich vier ist.

Diese Tatsache führt zu folgendem Syntheseverfahren.

Satz 6.3:

Zu jeder Allpaßfunktion

$$A(p_1, p_2, p_3) = \frac{a_*(p_1, p_2, p_3)}{a(p_1, p_2, p_3)} \in \Omega_p$$

existiert ein Reaktanzeintor mit der Reflektanz A, falls die Polynome $a(\underline{p})$ und $a_*(\underline{p})$ teilerfremd sind und

$$\deg_1 a = \deg_2 a = \deg_3 a = 1.$$

Beweis:

Laut Satz 5.2 ist $a(\underline{p})$ ein Haupt-Hurwitzpolynom, das aufgrund der gemachten Voraussetzung in der Form

$$a(\underline{p}) = a_0(p_2, p_3) + a_1(p_2, p_3) p_1$$

geschrieben werden kann, wo a_0 und a_1 Polynome in (p_2, p_3) sind, deren Gesamtgrad kleiner oder gleich zwei ist.

Gemäß Satz A 2.4 ist dann

$$W := \frac{a_0}{a_1}$$

eine positive Funktion, d.h.

$$\operatorname{Re} W(j\omega_2, j\omega_3) \geq 0 \quad (6.39)$$

für alle Punkte $(j\omega_2, j\omega_3)$, an denen W holomorph ist.

Um den Realteil von W explizit angeben zu können, berechne man

$$W + W_* = \frac{a_0 a_{1*} + a_{0*} a_1}{a_1 a_{1*}} = \frac{1}{2} \frac{(a_0 + a_1)(a_0 + a_1)_* - (a_0 - a_1)(a_0 - a_1)_*}{a_1 a_{1*}},$$

und mit (6.6) erhält man

$$W + W_* = \frac{1}{2} \frac{g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*}}{a_1 a_{1*}},$$

wobei

$$a_0 a_{1*} + a_{0*} a_1 = \frac{1}{2} (g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*}) \neq 0,$$

da andernfalls a und a_* einen gemeinsamen p_1 -abhängigen Faktor besäßen (man betrachte die Resultante [27] von a und a_* bezügl. p_1), deshalb gilt auch

$$\frac{g_{0*}}{g_1} \neq \text{unimodulare Konstante.}$$

Berücksichtigt man nun (6.39), so folgt

$$\operatorname{Re} W(j\omega_2, j\omega_3) = \frac{g_1(j\omega_2, j\omega_3) g_{1*}(j\omega_2, j\omega_3) - g_0(j\omega_2, j\omega_3) g_{0*}(j\omega_2, j\omega_3)}{4 |a_1(j\omega_2, j\omega_3)|^2} \geq 0,$$

wo

$$|g_1(j\omega_2, j\omega_3)|^2 - |g_0(j\omega_2, j\omega_3)|^2$$

ein nichtnegativ definites, reelles Polynom in (ω_2, ω_3) vom Gesamtgrad kleiner oder gleich vier ist, d.h., es läßt sich in eine Summe reeller Polynomquadrate zerlegen [28]. Substituiert man in dieser neuen Darstellung (ω_2, ω_3) durch $(\frac{p_2}{j}, \frac{p_3}{j})$, so erhält man

$$g_1(p_2, p_3) g_{1*}(p_2, p_3) - g_0(p_2, p_3) g_{0*}(p_2, p_3) = \sum_{i=1}^q P_{i*}(p_2, p_3) P_i(p_2, p_3),$$

wo q die Anzahl der Polynomquadrate und $P_i(p_2, p_3)$ ein Polynom in (p_2, p_3) ist, mit

$$P_{i*} = P_i.$$

Die Gültigkeit obiger Beziehung für alle $(p_2, p_3) \in \mathbb{C}^2$ kann durch analytische Fortsetzung gezeigt werden.

Falls $g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*}$ ein reelles Polynom repräsentiert, so ist der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^q P_{i*} P_i$$

ebenfalls reell und kann wie folgt dargestellt werden. Man schreibe die Polynome P_i als

$$P_i = P'_i + j P''_i,$$

wo P'_i und P''_i reelle Polynome in (p_2, p_3) sind, wobei aufgrund von $P_i = P_{i*}$ gilt

$$P'_{i*} = P'_i,$$

$$P''_{i*} = -P''_i.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q P_{i*} P_i &= \sum_{i=1}^q (P_i'^2 - P_i''^2 + j 2 P'_i P''_i) \\ &= \sum_{i=1}^q (P'_i - P''_i)(P'_i + P''_i) + j 2 \sum_{i=1}^q P'_i P''_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^q (P'_i + P''_i) * (P'_i + P''_i) + j2 \sum_{i=1}^q P'_i P''_i \\
 &= \sum_{i=1}^q (P'_i + P''_i) * (P'_i + P''_i),
 \end{aligned}$$

da der Ausdruck auf der linken Seite laut Voraussetzung reell ist. Diese Darstellung bietet den Vorteil, daß nun alle Polynome $(P'_i + P''_i)$ der rechten Seite reell sind. Falls diese Möglichkeit der Faktorisierung besteht, so wird im folgenden $(P'_i + P''_i)$ in P_i umbenannt. Bei komplexen Netzwerken besteht diese Möglichkeit i.a. nicht, weshalb die ursprünglichen Polynome P_i weiter verwendet werden können.

Faßt man jetzt die Polynome P_i zu dem Polynomvektor

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_q \end{bmatrix}$$

zusammen, so folgt

$$\underline{P}_* \underline{P} = g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*}, \quad (6.40)$$

wobei

$$\underline{P} \neq \underline{0},$$

da

$$g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*} \neq 0.$$

Nach diesen einleitenden Betrachtungen kann das eigentliche Syntheseverfahren entwickelt werden. Zunächst sucht man eine $((q+1) \times (q+1))$ -Matrix $\underline{A}'(p_2, p_3)$, die ein Element aus Ω_p ist und deren Blockelemente eine Lösung der Gleichung (6.5) sind. Wie bereits früher gezeigt wurde, kann jede Lösung der Gleichung (6.5) als

Streumatrix eines $(q+1)$ -Tors aufgefaßt werden, das nach Abschluß der letzten q Tore mit Kapazitäten der Admittanz p_1 ein Eintor mit der Reflektanz $A(\underline{p})$ ergibt. Somit wäre das Problem auf die Synthese von $\underline{A}'(p_2, p_3)$ zurückgeführt. Da $\underline{A}'(p_2, p_3)$ laut obiger Forderung ein Element aus Ω_p sein soll, so kann diese zweidimensionale Matrix mit Hilfe des Verfahrens aus Kapitel 4 realisiert werden. Eingehende Untersuchungen führten zu dem überraschenden Ergebnis, daß eine Matrix $\underline{A}'$, die den oben genannten Forderungen genügt, explizit in Abhängigkeit von $\underline{P}$, g_1 und g_0 wie folgt angegeben werden kann:

$$\underline{A}' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

mit

$$A_{11} = \frac{g_{0*}}{g_1}, \quad (6.41a)$$

$$A_{21} = \frac{P}{g_1}, \quad (6.41b)$$

$$A_{12} = \frac{P_*}{g_1}, \quad (6.41c)$$

$$A_{22} = \frac{P P_* - g_1(g_{1*} + g_0) \frac{1}{g_1}}{g_1(g_1 + g_{0*})}. \quad (6.41d)$$

Zunächst soll gezeigt werden, daß die soeben definierte Matrix $\underline{A}'$ ein Element aus Ω_p ist.

i) $\underline{A}'(p_2, p_3)$ ist offensichtlich rational.

ii) Da

$$|g_1(j\omega')|^2 - |g_{0*}(j\omega')|^2 \geq 0,$$

so folgt für alle Punkte ω' , für die $g_1(j\omega')$ ungleich null

ist

$$\left| \frac{g_{0*}(j\omega')}{g_1(j\omega')} \right| \leq 1,$$

wobei $\frac{g_{0*}}{g_1}$ keine unimodulare Konstante ist!

Des weiteren ist $g_1(p_2, p_3)$ aufgrund von A 1.1 ein Haupt-Hurwitzpolynom, denn

$$g_1(p_2, p_3) = a_0(p_2, p_3) + a_1(p_2, p_3) = a(1, p_2, p_3),$$

und a ist laut Voraussetzung ein Haupt-Hurwitzpolynom.

Diese Eigenschaften implizieren zusammen mit A 3.2

$$\left| \frac{g_{0*}}{g_1} \right| < 1 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} p' > \underline{0},$$

d.h.

$$|g_1| > |g_{0*}| \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} p' > \underline{0}.$$

Somit folgt

$$g_1(p') + g_{0*}(p') \neq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} p' > \underline{0},$$

d.h., $\underline{A}'(p')$ ist holomorph für $\operatorname{Re} p' > \underline{0}$, da

auch

$$g_1(p') \neq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} p' > \underline{0}.$$

iii) Mit (6.41) und unter Berücksichtigung von (6.40) folgt

$$\underline{A}' \underline{A}'^* = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} \underline{A}_{11}^* + \underline{A}_{12} \underline{A}_{12}^* & \underline{A}_{11} \underline{A}_{21}^* + \underline{A}_{12} \underline{A}_{22}^* \\ \underline{A}_{21} \underline{A}_{11}^* + \underline{A}_{22} \underline{A}_{12}^* & \underline{A}_{21} \underline{A}_{21}^* + \underline{A}_{22} \underline{A}_{22}^* \end{bmatrix} = \underline{1},$$

d.h., $\underline{A}'$ ist paraunitär.

Aus den Eigenschaften i) bis iii) und der Definition 3.1 folgt

$$\underline{A}'(p') \in \Omega_p.$$

Nun muß noch bewiesen werden, daß (6.41) eine Lösung von (6.5) ist.

Hierzu transformiere man den Zeilenvektor $\underline{A}_{12}$ mit Hilfe einer rationalen, regulären Matrix $\underline{T}$ in die Form

$$\underline{A}_{12} = (1 \quad 0) \underline{T}. \quad (6.42)$$

Dies ist stets möglich, da $\underline{A}_{12} = \frac{p_*}{g_1} \neq 0$, was aus den Bemerkungen zu Gleichung (6.40) folgt.

Anschließend betrachte man

$$\underline{A}_{12} \left(\frac{1+p_1}{1-p_1} \frac{1}{q} - \underline{A}_{22} \right)^{-1} \underline{A}_{21} = \underline{A}_{12} \underline{T}^{-1} \left(\frac{1+p_1}{1-p_1} \frac{1}{q} - \underline{T} \underline{A}_{22} \underline{T}^{-1} \right)^{-1} \underline{T} \underline{A}_{21},$$

mit (6.41d), (6.42) und (6.41c) erhält man

$$\underline{A}_{12} \left(\frac{1+p_1}{1-p_1} \frac{1}{q} - \underline{A}_{22} \right)^{-1} \underline{A}_{21} = (1 \quad 0) \underbrace{\left(\frac{1+p_1}{1-p_1} \frac{1}{q} - \underline{T} \frac{p}{g_1+g_{0*}} (1 \quad 0) + \frac{g_{1*}+g_0}{g_1+g_{0*}} \frac{1}{q} \right)^{-1} \underline{T}}_{\text{untere Dreiecksmatrix}} \underline{A}_{21}.$$

Die Hauptdiagonale der Inversen einer unteren Dreiecksmatrix besteht aus den Kehrwerten der jeweiligen Hauptdiagonalelemente dieser unteren Dreiecksmatrix, somit erhält man für obigen Ausdruck

$$\begin{aligned} \underline{A}_{12} \left(\frac{1+p_1}{1-p_1} \frac{1}{q} - \underline{A}_{22} \right)^{-1} \underline{A}_{21} &= (1 \quad 0) \left[\begin{array}{c|c} \frac{1+p_1}{1-p_1} - (1 \quad 0) \underline{T} \frac{p}{g_1+g_{0*}} + \frac{g_{1*}+g_0}{g_1+g_{0*}}^{-1} & 0 \\ \hline \dots & \dots \end{array} \right] \underline{T} \underline{A}_{21} \\ &= \left(\frac{1+p_1}{1-p_1} - (1 \quad 0) \underline{T} \frac{p}{g_1+g_{0*}} + \frac{g_{1*}+g_0}{g_1+g_{0*}}^{-1} \right) (1 \quad 0) \underline{T} \underline{A}_{21} \end{aligned}$$

und mit (6.42), (6.41c), (6.40) und (6.41b)

$$\underline{A}_{12} \left(\frac{1+p_1}{1-p_1} \frac{1}{q} - \underline{A}_{22} \right)^{-1} \underline{A}_{21} = \left(\frac{1+p_1}{1-p_1} + \frac{g_0}{g_1} \right)^{-1} \frac{g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*}}{g_1^2}$$

und mit (6.41a) und (6.6)

$$A_{11} + A_{12} \left(\frac{1+p_1}{1-p_1} \frac{1-q^{-A_{22}}}{-1} \right) A_{21} = \frac{a_{0*} - a_{1*}p_1}{a_0 + a_1p_1} = \frac{a_*}{a} = A.$$

q.e.d.

6.2 Bauelementaufwand bei der Realisierung multidimensionaler Reaktanzmehrtore

Beim Entwurf mehrdimensionaler Netzwerke spielt die Frage nach der Zahl der benötigten reaktiven Bauelemente eine wichtige Rolle. Für eindimensionale Reaktanzmehrtore ist bekannt, daß die minimale Anzahl solcher Bauelemente gleich dem McMillan-Grad (vergl. A 4.4) der zugehörigen Streumatrix ist. Für zweidimensionale, verlustlose Netzwerke wurde im Kapitel 4 eine analoge Aussage getroffen, d.h., die minimale Anzahl der Bauelemente des Typs p_1 entspricht dem Teilgrad n_1 des Nennerpolynoms der irreduziblen Determinante der Streumatrix. Somit erhebt sich die Frage, ob letztere Eigenschaft auch bei höherdimensionalen Netzwerken allgemein gültig bleibt.

Entsprechende Untersuchungen führten zu dem Resultat, daß dies bereits für das dreidimensionale Problem nicht mehr zutrifft, was nun an Hand eines Beispiels gezeigt wird.

Lemma 6.4:

Das dreidimensionale Polynom

$$a(p_1, p_2, p_3) = (1 + p_3 + p_3 p_2) + (2 + 2p_3 + p_2 + p_3 p_2 + p_3^2 + p_3^2 p_2) p_1$$

ist ein Haupt-Hurwitzpolynom.

Beweis:

Man betrachte die Schaltung gemäß Bild 6.2.

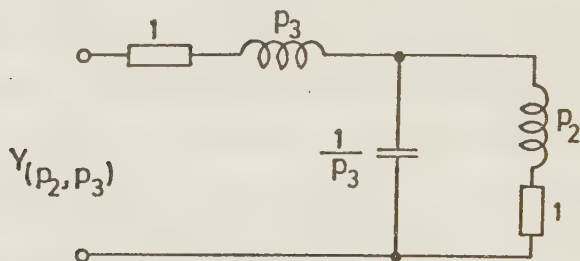


Bild 6.2

Die Admittanz des passiven Eintors in Bild 6.2

$$Y(p_2, p_3) = \frac{1 + p_3 + p_3 p_2}{2 + 2p_3 + p_2 + p_3 p_2 + p_3^2 + p_3^2 p_2}$$

ist eine positive Funktion, d.h.

$$\operatorname{Re} Y(p_2, p_3) \geq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(p_2, p_3) > 0.$$

Sei (p_{10}, p_{20}, p_{30}) eine Nullstelle des Polynoms a , dann gilt

$$p_{10} = - \frac{1 + p_{30} + p_{30} p_{20}}{2 + 2p_{30} + p_{20} + p_{30} p_{20} + p_{30}^2 + p_{30}^2 p_{20}} = -Y(p_{20}, p_{30})$$

d.h.

$$\operatorname{Re} p_{10} = -\operatorname{Re} Y(p_{20}, p_{30}) \leq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(p_{20}, p_{30}) > 0,$$

und somit

$$a(p_1, p_2, p_3) \neq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re}(p_1, p_2, p_3) > 0.$$

Nun muß noch gezeigt werden, daß a und a_* teilerfremd sind.

Falls a und a_* einen gemeinsamen p_1 -abhängigen Faktor besitzen,

dann gilt

$$Y = -Y_*$$

Dies ist jedoch offensichtlich nicht der Fall. Demnach wäre jeder gemeinsame Faktor von a und a_* auch ein gemeinsamer Faktor von $(1+p_3+p_3p_2)$ und $(2+2p_3+p_2+p_3p_2+p_3^2+p_3^2p_2)$. Das Polynom $(1+p_3+p_3p_2)$ ist jedoch irreduzibel, so daß $(0,-1)$ auch eine Nullstelle von $(2+2p_3+p_2+p_3p_2+p_3^2+p_3^2p_2)$ sein müßte, was jedoch zu einem Widerspruch führt, d.h., a und a_* sind teilerfremd.

q.e.d.

Satz 6.4:

Die rationale Funktion

$$A(p) = \frac{a_*(p)}{a(p)}$$

kann als Reflektanz eines dreidimensionalen Reaktanzeintors betrachtet werden, das mindestens zwei p_1 -abhängige Bauelemente enthalten muß. Das Polynom a sei durch Lemma 6.4 definiert.

Beweis:

Gemäß Lemma 6.4 und Satz 5.1 ist $A(p)$ ein Element aus Ω_p . Man gehe nun von der Existenz einer zugehörigen verlustlosen Eintorschaltung aus und betrachte eine Realisierung $N_{\min}$, die minimal bezüglich der p_1 -abhängigen Bauelemente ist. Entsprechend der Vorgehensweise in Kapitel 6.1 verwandle man alle p_1 -abhängigen Reaktanzen in Kapazitäten der Admittanz p_1 und ziehe sie aus $N_{\min}$ heraus. Hierbei entsteht ein zweidimensionales $(q_{\min}+1)$ -Tor $N'_{\min}$, wo $q_{\min}$ die Anzahl p_1 -abhängiger Bauelemente in $N_{\min}$ symbolisiert.

Da

$$\deg_1 a = 1,$$

so läßt sich das Polynom $a(p)$ auch in der Form

$$a(p) = a_0(p_2, p_3) + a_1(p_2, p_3)p_1$$

schreiben, wo

$$a_0(p_2, p_3) = 1 + p_3 + p_3 p_2,$$

$$a_1(p_2, p_3) = 2 + 2p_3 + p_2 + p_3 p_2 + p_3^2 + p_3^2 p_2,$$

und mit (6.6) erhält man

$$g_0 = -1 - p_3 - p_2 - p_3^2 - p_3^2 p_2,$$

$$g_1 = 3 + 3p_3 + p_2 + 2p_3 p_2 + p_3^2 + p_3^2 p_2.$$

Gemäß den Ausführungen in Kapitel 6.1 ist Gleichung (6.22) eine notwendige Bedingung für die Existenz der Schaltung $N_{\min}$, d.h. es muß gelten

$$g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*} = 4(2 - p_3^2 + 2p_3 p_2 + p_3^2 p_2^2) = \sum_{i=1}^{q_{\min}} p_{i*} p_i,$$

wo die P_i Polynome in (p_2, p_3) sind.

Zuerst soll gezeigt werden, daß sich das Polynom $4(2 - p_3^2 + 2p_3 p_2 + p_3^2 p_2^2)$ nicht in ein Produkt $P_{1*} P_1$ zerlegen läßt. Hierzu mache man den Ansatz

$$P_1(p_2, p_3) = (P_{11} + P_{12} p_2) + (P_{13} + P_{14} p_2) p_3$$

und setze ihn in die Gleichung

$$4(2 - p_3^2 + 2p_3 p_2 + p_3^2 p_2^2) = P_{1*} P_1$$

ein. Nach Ausmultiplikation der Terme und anschließendem Koeffizientenvergleich erhält man das Gleichungssystem

$$|P_{11}|^2 = 8, \quad (6.43a)$$

$$|P_{14}|^2 = 4, \quad (6.43b)$$

$$|P_{13}|^2 = 4, \quad (6.43c)$$

$$P_{13}P_{11}^* = P_{11}P_{13}^*, \quad (6.43d)$$

$$P_{13}P_{14}^* = P_{14}P_{13}^*, \quad (6.43e)$$

$$|P_{12}|^2 = 0, \quad (6.43f)$$

$$P_{14}P_{11}^* + P_{14}^*P_{11} - P_{12}P_{13}^* - P_{13}P_{12}^* = 8. \quad (6.43g)$$

Da P_{11} , P_{14} und P_{13} offensichtlich ungleich null sind, kann Gleichung (6.43d) durch (6.43e) dividiert werden

$$\frac{P_{11}^*}{P_{14}^*} = \frac{P_{11}}{P_{14}}.$$

Setzt man dieses Ergebnis in (6.43g) ein und berücksichtigt (6.43f), so ergibt sich

$$2 P_{14}^* P_{11} = 8,$$

d.h.

$$|P_{14}| |P_{11}| = 4.$$

Dies ist jedoch offensichtlich ein Widerspruch zu (6.43a) und (6.43b), d.h., das Polynom $4(2 - p_3^2 + 2p_3p_2 + p_3^2p_2^2)$ kann nicht in ein Produkt $P_{1*}P_1$ zerlegt werden. Somit ist $q_{\min}$ größer als eins.

Nun muß noch die Existenz eines Reaktanzeintors mit der Reflektanz $A(\underline{p})$ nachgewiesen werden.

Hierzu betrachte man den Polynomvektor

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{2} p_3 + 2p_3p_2 \\ 2 + \sqrt{2} p_3 \end{bmatrix},$$

der eine Lösung der Gleichung

$$g_1 g_{1*} - g_0 g_{0*} = 4(2 - p_3^2 + 2p_3p_2 + p_3^2 p_2^2) = \underline{p}_* \underline{p}$$

ist.

Entsprechend dem Syntheseverfahren aus dem Beweis zu Satz 6.3 läßt sich mit Hilfe von $\underline{p}$ und der bereits definierten Polynome g_1 und g_0 über die Gleichungen (6.41a - 6.41d) ein zweidimensionales Koppelnetzwerk N' finden, das nach Abschluß der beiden letzten Tore mit Kapazitäten der Admittanz p_1 ein Reaktanzeintor ergibt, das durch $A(\underline{p})$ beschrieben wird.

Man beachte, daß zwar im vorliegenden Falle

$$\deg_3 a > 1,$$

was jedoch keinerlei Bedeutung für die Beweisführung des Satzes 6.3 hat, da die Restriktion

$$\deg_3 a = 1$$

lediglich die allgemeine Lösbarkeit der Gleichung (6.40) garantieren sollte. Wie soeben gezeigt wurde, kann aber für das gewählte Beispiel eine Lösung für (6.40) angegeben werden.

q.e.d.

6.3 Synthese multidimensionaler Netzwerke unter Verwendung aktiver Bauelemente

Im Abschnitt 6.1 wurde gezeigt, daß nicht zu jeder Matrix $\underline{S}(\underline{z}) \in \Omega_z$ in $k \geq 3$ Variablen ein konkret passives Netzwerk mit der Streumatrix $\underline{S}(\underline{z})$ gehört.

Aus theoretischer Sicht wäre es nun interessant zu klären, ob dann wenigstens ein aktives Netzwerk gefunden werden kann, das durch die vorgegebene Matrix $\underline{S} \in \Omega_z$ beschrieben wird, d.h., es würden nun auch Kapazitäten und Induktivitäten mit negativem Bauelementwert zugelassen.

Im folgenden wird nun ein solches Syntheseverfahren vorgestellt, das für alle Elemente aus Ω_z anwendbar ist.

Auch in diesem Kapitel werden alle Größen neu definiert und zum Teil mit bereits früher verwendeten Formelzeichen belegt.

Definition 6.1:

Ω_u sei die Menge aller rationalen, diskret paraunitären Matrizen $\underline{S}(\underline{z})$, d.h. es gilt

$$\underline{S} \underline{S}^* = \underline{S}^* \underline{S} = \underline{1}.$$

Vergleicht man Definition 3.3 mit Definition 6.1, so erkennt man

$$\Omega_z \subset \Omega_u. \quad (6.44)$$

Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen sei nun eine (mxm) -Matrix $\underline{S}(\underline{z})$ aus Ω_u in k Variablen, wobei folgende Schreibweise vereinbart wird

$$\underline{z} = (\underline{z}', z_k), \quad \underline{z}' = (z_1, z_2, \dots, z_{k-1}).$$

Die Synthese erfolgt zum großen Teil ähnlich wie in Kapitel 4 beschrieben, weshalb an bestimmten Stellen auf Bilder und Beweise aus diesem Abschnitt verwiesen wird. Zunächst schreibt man $\underline{S}$ als Quotient aus einer Polynommatrix $\underline{P}(\underline{z})$ und dem Hauptnennerpolynom $g(\underline{z})$:

$$\underline{S}(\underline{z}) = \frac{\underline{P}(\underline{z})}{g(\underline{z})}. \quad (6.45)$$

Es sei

$$l = \deg_k \underline{P} - \deg_k g. \quad (6.46)$$

Falls $l > 0$, so schreibt man

$$\underline{S}(\underline{z}) = \underline{S}_1(\underline{z}) \underline{S}_2(\underline{z}), \quad (6.47)$$

mit

$$\underline{S}_1(\underline{z}) := \frac{\underline{P}(\underline{z})}{g(\underline{z}) z_k^l} \quad (6.48)$$

und

$$\underline{S}_2(\underline{z}) := z_k^{-1} \underline{1}_m. \quad (6.49)$$

$\underline{S}_1$ und $\underline{S}_2$ sind offensichtlich beide rational in $\underline{z}$ und diskret paraunitär, d.h. Elemente aus Ω_u . Die Streumatrizen $\underline{S}_1$ und $\underline{S}_2$ werden getrennt realisiert und die dabei entstehenden Netzwerke N_1 bzw. N_2 mit Hilfe von Zirkulatoren zu dem Gesamtnetzwerk N zusammenschaltet [30], das durch $\underline{S}(\underline{z})$ beschrieben wird.

Berücksichtigt man, daß

$$z_k = \frac{1+p_k}{1-p_k}$$

als Reflektanz einer Kapazität der Admittanz $-\frac{p_k}{R_1}$ interpretiert werden kann, so wird die Synthese von $\underline{S}_2$ trivial.

Das durch $\underline{S}_2$ beschriebene Netzwerk N_2 ist in Bild 6.3 dargestellt, wo R_1 bis R_m die Torwiderstände des Netzwerks N sind.

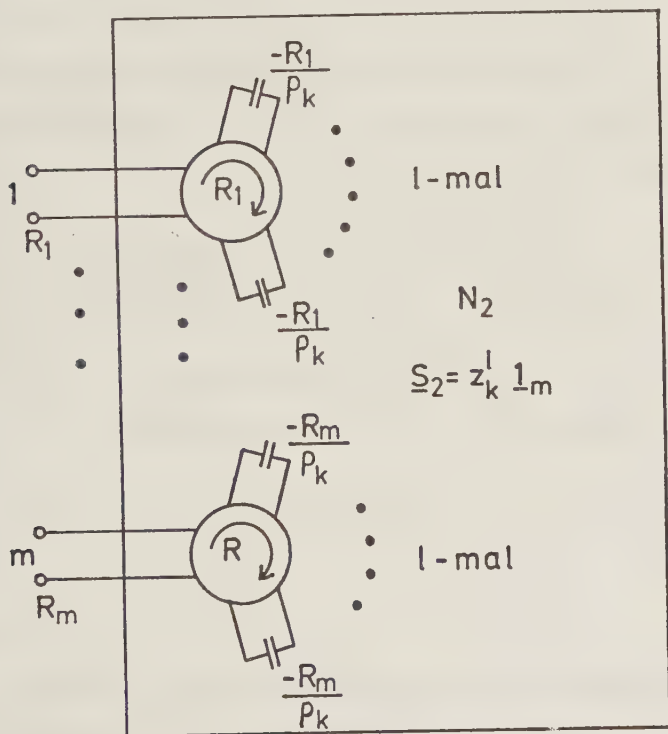


Bild 6.3

Damit ist das Problem auf die Synthese der Matrix $\underline{S}_1$ reduziert, wobei nun aufgrund von (6.46) gilt

$$\deg_k(g \ z_k^1) \geq \deg_k \underline{P}.$$

Um die Notation nicht unnötig zu erschweren, wird im folgenden davon ausgegangen, daß

$$l \leq 0,$$

da aufgrund obiger Betrachtungen das Syntheseproblem stets auf diesen Fall zurückgeführt werden kann, d.h. es wird vorausgesetzt

$$n_k := \deg_k g \geq \deg_k \underline{P}. \quad (6.50)$$

Im ersten Schritt versucht man, eine $(k-1)$ -dimensionale Streumatrix $\underline{S}'(\underline{z}')$ zu finden, durch die ein $(m+mn_k+2r)$ -Tor N' beschrieben wird, das nach Abschluß der letzten (mn_k+2r) Tore mit z_k^{-1} -Reflektanzen ein m -Tor N ergibt, dessen Streumatrix identisch ist mit $\underline{S}(\underline{z})$.

Zunächst wird diese Matrix $\underline{S}'(\underline{z}')$ in Blöcke aufgeteilt:

$$\underline{S}' = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} & \underline{0} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{1}_{2r} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ mn_k \\ 2r \end{matrix} \quad (6.51)$$

Damit $\underline{S}'$ die gewünschte Eigenschaft besitzt, ist es notwendig und hinreichend zu fordern, daß die Elemente von $\underline{S}'$ der Gleichung

$$\underline{S} = \underline{S}_{11} + (\underline{S}_{12} \ \underline{0}) \begin{bmatrix} z_k^{-1} mn_k + 2r & - \begin{bmatrix} \underline{S}_{22} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1}_{2r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{S}_{21} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

genügen (vergl. Abschnitt 4.2).

Durch einfache Umformung von (6.52) erhält man die äquivalente Forderung

$$\underline{S} = \underline{S}_{11} + \underline{S}_{12} (z_k \underline{1}_{mn_k} - \underline{S}_{22})^{-1} \underline{S}_{21}. \quad (6.53)$$

Aufgrund von (6.50) läßt sich schreiben

$$\underline{P}(\underline{z}) = \underline{P}_0(\underline{z}') + \underline{P}_1(\underline{z}') z_k + \dots + \underline{P}_{n_k}(\underline{z}') z_k^{n_k}, \quad (6.54a)$$

$$g(\underline{z}) = g_0(\underline{z}') + g_1(\underline{z}') z_k + \dots + g_{n_k}(\underline{z}') z_k^{n_k}, \quad (6.54b)$$

mit

$$g_{n_k}(\underline{z}') \neq 0.$$

Analog zu Kapitel 4 definiere man nun die Größen

$$u_i(\underline{z}') := \frac{g_i(\underline{z}')}{g_{n_k}(\underline{z}')} , \quad i=0, \dots, n_k, \quad (6.55)$$

$$\underline{N}_i(\underline{z}') := \frac{\underline{P}_i(\underline{z}')}{g_{n_k}(\underline{z}')} , \quad i=0, \dots, n_k, \quad (6.56)$$

$$\underline{A}_i(\underline{z}') := \underline{N}_i(\underline{z}') - \underline{N}_{n_k}(\underline{z}') u_i(\underline{z}'), \quad i=0, \dots, n_k-1. \quad (6.57)$$

Satz 6.5:

Die nachfolgend definierten Matrizen $\underline{S}_{11}$, $\underline{S}_{12}$, $\underline{S}_{21}$ und $\underline{S}_{22}$ erfüllen die Gleichung (6.53):

$$\underline{S}_{11} := \underline{N}_{n_k}, \quad (6.58a)$$

$$\underline{S}_{21} := \begin{bmatrix} \underline{A}_0 \\ \underline{A}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{A}_{n_k-1} \end{bmatrix}, \quad (6.58b)$$

$$\underline{S}_{12} := [\underline{0} \quad \underline{0} \quad \dots \quad \underline{0} \quad \underline{1}_m], \quad (6.58c)$$

$$\underline{S}_{22} := \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} & -\underline{u}_0 \underline{1}_m \\ \underline{1}_m & \underline{0} & \dots & \underline{0} & -\underline{u}_1 \underline{1}_m \\ \underline{0} & \underline{1}_m & & \underline{0} & -\underline{u}_2 \underline{1}_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & & \underline{1}_m & -\underline{u}_{n_k-1} \underline{1}_m \end{bmatrix}. \quad (6.58d)$$

Beweis:

Siehe Beweis zu Satz 4.1.

Da $\underline{S}'(\underline{z}')$ kein Element aus Ω_u ist, so muß nun eine Ähnlichkeits-
transformation durchgeführt werden, um eine diskret paraunitäre
Blockmatrix zu erzeugen.

Mit Hilfe einer rationalen, regulären Matrix $\underline{T}(\underline{z}')$ bilde man

$$\underline{S}''(\underline{z}') = \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T} \end{bmatrix} \underline{S}' \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T} \end{bmatrix}^{-1} \quad \begin{matrix} m \\ mn_k+2r \\ m \quad mn_k+2r \end{matrix} \quad (6.59)$$

und teile die resultierende Matrix in Blöcke auf:

$$\underline{S}''(\underline{z}') = \begin{bmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} & \underline{F}_{13} & \underline{F}_{14} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} & \underline{F}_{23} & \underline{F}_{24} \\ \underline{F}_{31} & \underline{F}_{32} & \underline{F}_{33} & \underline{F}_{34} \\ \underline{F}_{41} & \underline{F}_{42} & \underline{F}_{43} & \underline{F}_{44} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ r \\ 2r \\ mn_k - r \\ m \quad r \quad 2r \quad mn_k - r \end{matrix} \quad (6.60)$$

Die Ähnlichkeitstransformation (6.59) verändert lediglich die innere Struktur des Netzwerks N, d.h., die Zustandsgrößen werden transformiert, ohne jedoch das äußere Verhalten zu beeinflussen. Die Matrix $\underline{S}''(\underline{z}')$ kann daher als Streumatrix eines $(k-1)$ -dimensionalen Netzwerks N' aufgefaßt werden, das nach Abschluß der letzten $(mn_k + 2r)$ Tore mit z_k^{-1} -Reflektanzen eine k-dimensionale Schaltung ergibt, die durch $\underline{S}(\underline{z})$ beschrieben wird, d.h. es gilt

$$\underline{S}(\underline{z}) = \underline{F}_{11} + (\underline{F}_{12} \underline{F}_{13} \underline{F}_{14}) \left[z_k^{-1} \underline{1}_{mn_k + 2r} - \begin{bmatrix} \underline{F}_{22} & \underline{F}_{23} & \underline{F}_{24} \\ \underline{F}_{32} & \underline{F}_{33} & \underline{F}_{34} \\ \underline{F}_{42} & \underline{F}_{43} & \underline{F}_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{F}_{21} \\ \underline{F}_{31} \\ \underline{F}_{41} \end{bmatrix} \right] \quad (6.61)$$

Die Transformationsmatrix $\underline{T}(\underline{z}')$ soll nun so bestimmt werden, daß

$$\underline{S}'' \begin{bmatrix} \underline{1}_{m+r} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{1}_{2r} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{S}'' = \begin{bmatrix} \underline{1}_{m+r} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{1}_{2r} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

Setzt man nun (6.59) und (6.51) in die Gleichung (6.62) ein und vergleicht die entstehenden Blockmatrizen links und rechts des Gleichheitszeichens, so ergibt sich ein System von Matrixgleichungen:

$$\underline{s}_{11} \underline{s}_{11} + (\underline{s}_{12} \ 0) \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{1}_r & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{1}_{2r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{s}_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{1}_m, \quad (6.63a)$$

$$\underline{T} \begin{bmatrix} \underline{s}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \underline{s}_{11} + \underline{T} \begin{bmatrix} \underline{s}_{22} & 0 \\ 0 & \underline{1} \end{bmatrix} \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{1}_r & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{1}_{2r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{s}_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad (6.63b)$$

$$\underline{s}_{11} (\underline{s}_{21} \ 0) \underline{T} + (\underline{s}_{12} \ 0) \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{1}_r & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{1}_{2r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{s}_{22} & 0 \\ 0 & \underline{1} \end{bmatrix} \underline{T} = 0, \quad (6.63c)$$

$$\underline{T} \begin{bmatrix} \underline{s}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} (\underline{s}_{21} \ 0) \underline{T} + \underline{T} \begin{bmatrix} \underline{s}_{22} & 0 \\ 0 & \underline{1} \end{bmatrix} \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{1}_r & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{1}_{2r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{s}_{22} & 0 \\ 0 & \underline{1} \end{bmatrix} \underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{1}_r & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{1}_{2r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.63d)$$

Die Gleichungen (6.63b) und (6.63c) sind äquivalent, da beide zueinander diskret parakonjugiert sind.

Zur Vereinfachung der Schreibweise definiere man die Matrix

$$\underline{K} := \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{1}_r & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{1}_{2r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{T}^{-1}, \quad (6.64)$$

wodurch das System (6.63) übergeht in

$$\underline{s}_{11} \underline{s}_{11} + (\underline{s}_{12} \ 0) \underline{K} \begin{bmatrix} \underline{s}_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{1}_m, \quad (6.65a)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{s}_{21} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{s}_{11} + \begin{bmatrix} \underline{s}_{22} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix} \underline{K} \begin{bmatrix} \underline{s}_{12} \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \underline{0}, \quad (6.65b)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{s}_{21} \\ \underline{0} \end{bmatrix} (\underline{s}_{21} \ \underline{0}) + \begin{bmatrix} \underline{s}_{22} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix} \underline{K} \begin{bmatrix} \underline{s}_{22} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix} = \underline{K}. \quad (6.65c)$$

Die Aufgabe besteht nun darin, eine rationale Matrix $\underline{K}$ zu finden, die eine Lösung des Systems (6.65) darstellt und in die Form (6.64) zerlegt werden kann.

Ähnliche Überlegungen wie in Kapitel 4 führten zu folgendem Lösungsansatz.

Satz 6.6:

Die nachfolgend angegebene Matrix $\underline{K}(\underline{z}')$ ist eine Lösung des Gleichungssystems (6.65):

$$\underline{K}(\underline{z}') = \begin{bmatrix} \underline{K}_1(\underline{z}') & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{K}_2(\underline{z}') \end{bmatrix} \begin{matrix} mn_k \\ 2r \end{matrix}, \quad (6.66)$$

$\begin{matrix} mn_k & 2r \end{matrix}$

mit

$$\underline{K}_1(\underline{z}') = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{n_k 1} \\ u_{21} & \vdots & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \underline{0} \\ u_{n_k 1} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{n_k 1} \\ u_{21} & \vdots & & \\ \vdots & & & \underline{0} \\ u_{n_k 1} & & & \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \underline{N}_1 & \underline{N}_2 & \dots & \underline{N}_{n_k} \\ \underline{N}_2 & \vdots & & \\ \vdots & & \underline{0} & \\ \underline{N}_{n_k} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{N}_1 & \underline{N}_2 & \dots & \underline{N}_{n_k} \\ \underline{N}_2 & \vdots & & \\ \vdots & & \underline{0} & \\ \underline{N}_{n_k} & & & \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

und $\underline{K}_2(\underline{z}')$ beliebig.

Die Größen $\underline{u}_i$ und $\underline{N}_i$ sind durch (6.55) bzw. (6.56) definiert.

Beweis:

Gleichung (6.66) in das System (6.65) eingesetzt, führt zu

$$\underline{S}_{11} \underline{S}_{11} + \underline{S}_{12} \underline{K}_1 \underline{S}_{12} = \underline{1}_m, \quad (6.68a)$$

$$\underline{S}_{21} \underline{S}_{11} + \underline{S}_{22} \underline{K}_1 \underline{S}_{12} = \underline{0}, \quad (6.68b)$$

$$\underline{S}_{21} \underline{S}_{21} + \underline{S}_{22} \underline{K}_1 \underline{S}_{22} = \underline{K}_1. \quad (6.68c)$$

Der Rest des Beweises folgt aus den Ausführungen zu Satz 4.2. Denn vergleicht man

(4.4) mit (6.54a),

(4.5) mit (6.54b),

(4.6) mit (6.55),

(4.7) mit (6.56),

(4.8) mit (6.57),

(4.9) mit (6.58),

(4.19) mit (6.68),

(4.20) mit (6.67),

so wird die Richtigkeit der Behauptung offensichtlich, da im Beweis zu Satz 4.2 lediglich vorausgesetzt wurde, daß $\underline{S}(\underline{z})$ paraunitär sei. Diese Bedingung ist jedoch auch hier erfüllt, da $\underline{S}(\underline{z})$ ein Element

aus Ω_u ist.

q.e.d.

Sei r der Normalrang der Matrix $\underline{K}_1(\underline{z}')$,

$$r := \text{rank } \underline{K}_1, \quad (6.69)$$

so läßt sich $\underline{K}_1$ mit Hilfe einer rationalen, regulären Matrix $\underline{D}(\underline{z}')$ wie folgt diagonalisieren (vergl. A 4.15):

$$\underline{D} \underline{K}_1 \underline{D} = \begin{bmatrix} f_1(\underline{z}') & & & & \\ & f_2(\underline{z}') & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & f_r(\underline{z}') & \\ & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.70)$$

wobei

$$f_i(\underline{z}') \neq 0, \quad i = 1 \text{ bis } r.$$

Dies ist stets möglich, da $\underline{K}_1$ aufgrund der Definition (6.67) diskret paragerade ist, d.h.

$$\underline{K}_1 = \underline{K}_1^T. \quad (6.71)$$

Man definiere die $(r \times r)$ -Matrix

$$\underline{F}(\underline{z}') = \text{diag} (f_1, f_2, \dots, f_r), \quad (6.72)$$

wobei aufgrund von (6.70) und (6.71) gilt

$$\underline{F}(\underline{z}') = \underline{F}(\underline{z}')^T. \quad (6.73)$$

Die Blockmatrix $\underline{K}_2(\underline{z}')$ konnte bei der Lösung des Gleichungssystems (6.65) beliebig gewählt werden. Dieser freie Parameter wird nun dazu benutzt, die Faktorisierung (6.64) von $\underline{K}(\underline{z}')$ sicherzustellen.

Hierzu wähle man

$$\underline{K}_2(\underline{z}') = \begin{bmatrix} (\alpha \underline{1}_r + \frac{\underline{F}}{2\alpha})^{-2} & -\alpha^{-2} \underline{1}_r & -\alpha^{-2} \underline{1}_r \\ -\alpha^{-2} \underline{1}_r & -(\frac{\underline{F}}{2\alpha})^{-2} & -\alpha^{-2} \underline{1}_r \end{bmatrix}, \quad (6.74)$$

wo

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Setzt man (6.72) in (6.70) ein und benutzt die Beziehungen (6.66) und (6.74), so ergibt sich

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{D} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1}_{2r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{F} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & (\alpha \underline{1}_r + \frac{\underline{F}}{2\alpha})^{-2} & -\alpha^{-2} \underline{1}_r \\ \underline{0} & \underline{0} & -\alpha^{-2} \underline{1}_r & -(\frac{\underline{F}}{2\alpha})^{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{D} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1}_{2r} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (6.75)$$

Definiert man jetzt noch die Matrix

$$\underline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{D} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1}_{2r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{1}_{mn_k} \\ \underline{1}_{2r} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha \underline{1}_r + \frac{\underline{F}}{2\alpha})^{-1} & \alpha^{-1} \underline{1}_r & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \alpha^{-1} \underline{1}_r & -(\frac{\underline{F}}{2\alpha})^{-1} & \underline{0} \\ (\alpha \underline{1}_r + \frac{\underline{F}}{2\alpha}) & \alpha \underline{1}_r & \frac{\underline{F}}{2\alpha} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1}_{mn_k-r} \end{bmatrix}, \quad (6.76)$$

so läßt sich durch Ausmultiplikation der Terme und Berücksichtigung der Gleichungen (6.73) und (6.75) nachprüfen, daß

$$\underline{K} = \underline{T}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{1}_r & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{1}_{2r} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{T}^{-1},$$

wodurch sich $\underline{K}(\underline{z}')$ in die Form (6.64) zerlegen läßt.

Mit Hilfe der Gleichung (6.76) erhält man eine Transformationsmatrix $\underline{T}$, mit der sich die neue Streumatrix $\underline{S}''$ mittels (6.59) derart berechnen läßt, daß Gleichung (6.62) erfüllt ist, falls die Matrizen $\underline{T}$ und $(\alpha \underline{1}_r + \frac{\underline{F}}{2\alpha})$ regulär sind.

Der noch freie Parameter α soll im folgenden so gewählt werden, daß $\underline{T}$ und $(\alpha \underline{1}_r + \frac{\underline{F}}{2\alpha})$ regulär werden.

Zunächst definiere man die Matrix

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{M}_{11} & \underline{M}_{12} \\ \underline{M}_{21} & \underline{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} 2r \\ r \\ 2r & r \end{matrix} := \left[\begin{array}{cc|c} (\alpha \underline{1}_r + \frac{\underline{F}}{2\alpha})^{-1} & \alpha^{-1} \underline{1}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \alpha^{-1} \underline{1}_r & -(\frac{\underline{F}}{2\alpha})^{-1} \\ \hline (\alpha \underline{1}_r + \frac{\underline{F}}{2\alpha}) & \alpha \underline{1}_r & \frac{\underline{F}}{2\alpha} \end{array} \right] \quad (6.77)$$

und berechne mit A 4.8 ihre Determinante:

$$\det \underline{M} = \det \underline{M}_{11} \det (\underline{M}_{22} - \underline{M}_{21} \underline{M}_{11}^{-1} \underline{M}_{12}) = \frac{(-2)^r}{\det (\alpha \underline{1}_r + \frac{\underline{F}}{2\alpha})}. \quad (6.78)$$

Setzt man (6.77) in (6.76) ein, so erhält man

$$\underline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{D}^{-1} \\ \underline{1}_{2r} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1}_{mn_k-r} \end{bmatrix}, \quad (6.79)$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{M}^{-1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1}_{mn_k-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{1}_{2r} \\ \underline{D} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

und mit A 4.9 und A 4.10

$$|\det \underline{T}| = \left| \frac{\det \underline{D}}{\det \underline{M}} \right| \quad (6.81)$$

Außerdem erhält man mit (6.78) und (6.81)

$$|\det \underline{T}| = |\det \underline{D} \det(\alpha \underline{1}_r + \frac{\underline{F}}{2\alpha}) 2^{-r}|,$$

d.h., $\underline{T}$ ist regulär, falls $(\alpha \underline{1}_r + \frac{\underline{F}}{2\alpha})$ regulär ist, da $\underline{D}$ laut Voraussetzung invertiert werden kann. Die Matrix $(\alpha \underline{1}_r + \frac{\underline{F}}{2\alpha})$ wird aber für höchstens endlich viele Punkte singulär. Somit läßt sich zusammenfassend feststellen, daß α immer so gewählt werden kann, daß die Matrizen $(\alpha \underline{1}_r + \frac{\underline{F}}{2\alpha})$ und $\underline{T}$ regulär werden.

Durch die Ähnlichkeitstransformation (6.59) mit der in (6.76) definierten Matrix $\underline{T}$ erhält man eine neue Streumatrix $\underline{S}''(\underline{z}')$, die der Gleichung (6.62) genügt. Aus dieser Tatsache resultiert eine besondere Struktur der Matrix $\underline{S}''$, die nun näher untersucht werden soll.

Zunächst definiere man die Matrix

$$\underline{G} := \begin{bmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} & \underline{F}_{13} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} & \underline{F}_{23} \\ \underline{F}_{31} & \underline{F}_{32} & \underline{F}_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ r \\ 2r \end{matrix} \quad (6.82)$$

$\begin{matrix} m & r & 2r \end{matrix}$

Setzt man (6.82) und (6.60) in (6.62) ein, so erhält man

$$\underline{G} \begin{bmatrix} \underline{1}_{m+r} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{1}_{2r} \end{bmatrix} \underline{G} = \begin{bmatrix} \underline{1}_{m+r} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{1}_{2r} \end{bmatrix}, \quad (6.83)$$

$$(\underline{F}_{41} \ \underline{F}_{42} \ \underline{F}_{43}) \begin{bmatrix} \underline{1}_{m+r} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{1}_{2r} \end{bmatrix} \underline{G} = \underline{0}. \quad (6.84)$$

$\underline{G}$ und $\underline{G}$ sind aufgrund von Gleichung (6.83) reguläre Matrizen, weshalb die Beziehung (6.84) nur dann erfüllt sein kann, wenn

$$(\underline{F}_{41} \ \underline{F}_{42} \ \underline{F}_{43}) = \underline{0}. \quad (6.85)$$

Setzt man außerdem (6.82) in (6.83) ein, so folgt

$$\underline{F}_{31}\underline{F}_{31} + \underline{F}_{32}\underline{F}_{32} - \underline{F}_{33}\underline{F}_{33} = -\underline{1}_{2r},$$

d.h.

$$\underline{F}_{33}\underline{F}_{33} = \underline{1}_{2r} + \underline{F}_{31}\underline{F}_{31} + \underline{F}_{32}\underline{F}_{32}.$$

Die Matrix $\underline{F}_{33}\underline{F}_{33}$ ist für $\underline{z}' = e^{j\omega'}$ offensichtlich positiv definit hermitesch, somit muß $\underline{F}_{33}$ eine reguläre Matrix sein.

Satz 6.7:

Es gilt folgende Identität:

$$\begin{aligned}
 & (\underline{F}_{12}\underline{F}_{13}\underline{F}_{14}) \left[\begin{array}{c} z_{k-1}^{1} m_{n_k+2r} - \left[\begin{array}{ccc} \underline{F}_{22} & \underline{F}_{23} & \underline{F}_{24} \\ \underline{F}_{32} & \underline{F}_{33} & \underline{F}_{34} \\ \underline{F}_{42} & \underline{F}_{43} & \underline{F}_{44} \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \underline{F}_{21} \\ \underline{F}_{31} \\ \underline{F}_{41} \end{array} \right] \\ \end{array} \right] = \\
 & = -\underline{F}_{13} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{31} + (\underline{F}_{12} - \underline{F}_{13} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{32}, \underline{F}_{13} \underline{F}_{33}^{-1}). \\
 & \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} z_{k-1}^{1} & 0 \\ 0 & z_{k-1}^{-1} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} \underline{F}_{22} - \underline{F}_{23} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{32} & \underline{F}_{23} \underline{F}_{33}^{-1} \\ -\underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{32} & \underline{F}_{33}^{-1} \end{array} \right]^{-1} & \left[\begin{array}{c} \underline{F}_{21} - \underline{F}_{23} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{31} \\ -\underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{31} \end{array} \right] \\ \end{array} \right] \quad (6.86)
 \end{aligned}$$

Beweis:

Zunächst berücksichtige man die Beziehung (6.85), wodurch die linke Seite von Gleichung (6.86) übergeht in

$$\text{l.S.} = (\underline{F}_{12}\underline{F}_{13}) \left[\begin{array}{c} z_{k-1}^{1} - \left[\begin{array}{cc} \underline{F}_{22} & \underline{F}_{23} \\ \underline{F}_{32} & \underline{F}_{33} \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \underline{F}_{21} \\ \underline{F}_{31} \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (6.87)$$

Wendet man die Inversionsformel für Blockmatrizen A 4.1 auf den Ausdruck (6.87) an, so erhält man

$$\begin{aligned}
 \text{l.S.} = & (\underline{F}_{12}\underline{F}_{13}) \left[\begin{array}{c|c} \underline{H}^{-1} & \underline{H}^{-1} \underline{F}_{23} (z_{k-1}^{1} - \underline{F}_{33}^{-1})^{-1} \\ \hline (z_{k-1}^{1} - \underline{F}_{33}^{-1})^{-1} \underline{F}_{32} \underline{H}^{-1} & (z_{k-1}^{1} - \underline{F}_{33}^{-1})^{-1} (1 + \underline{F}_{32} \underline{H}^{-1} \underline{F}_{23} (z_{k-1}^{1} - \underline{F}_{33}^{-1})^{-1}) \end{array} \right] \\
 & \cdot \left[\begin{array}{c} \underline{F}_{21} \\ \underline{F}_{31} \end{array} \right] \quad (6.88)
 \end{aligned}$$

mit

$$\underline{H} = (\underline{z}_{k1r} - \underline{F}_{22} - \underline{F}_{23} (\underline{z}_{k1} - \underline{F}_{33})^{-1} \underline{F}_{32}), \quad (6.89)$$

und mit A 4.12 erhält man

$$(\underline{z}_{k12r} - \underline{F}_{33})^{-1} = -\underline{F}_{33}^{-1} - \underline{F}_{33}^{-1} (\underline{z}_{k1} - \underline{F}_{33})^{-1} \underline{F}_{33}^{-1}. \quad (6.90)$$

Zur Erleichterung der Notation definiere man die Matrix

$$\underline{W} := \underline{F}_{33}^{-1} (\underline{z}_{k1} - \underline{F}_{33})^{-1} \underline{F}_{33}^{-1}. \quad (6.91)$$

Setzt man nun (6.90) und (6.91) in (6.88) und (6.89) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{l.S.} &= \underline{F}_{12} \underline{H}^{-1} \underline{F}_{21} - \underline{F}_{12} \underline{H}^{-1} \underline{F}_{23} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{31} - \underline{F}_{12} \underline{H}^{-1} \underline{F}_{23} \underline{W} \underline{F}_{31} \\ &\quad - \underline{F}_{13} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{32} \underline{H}^{-1} \underline{F}_{21} - \underline{F}_{13} \underline{W} \underline{F}_{32} \underline{H}^{-1} \underline{F}_{21} + \\ &\quad \underline{F}_{13} (-\underline{F}_{33}^{-1} \underline{W} + (\underline{F}_{33}^{-1} + \underline{W}) \underline{F}_{32} \underline{H}^{-1} \underline{F}_{23} (\underline{F}_{33}^{-1} + \underline{W})) \underline{F}_{31}, \end{aligned} \quad (6.92)$$

mit

$$\underline{H} = (\underline{z}_{k1r} - \underline{F}_{22} + \underline{F}_{23} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{32} + \underline{F}_{23} \underline{F}_{33}^{-1} (\underline{z}_{k1} - \underline{F}_{33})^{-1} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{32}). \quad (6.93)$$

Jetzt wendet man die Inversionsformel A 4.1 auf den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (6.86) an und erhält

$$\begin{aligned}
 \text{r.S.} = & -\underline{F}_{13}\underline{F}_{33}^{-1}\underline{F}_{31} + (\underline{F}_{12}-\underline{F}_{13}\underline{F}_{33}^{-1}\underline{F}_{32}, \underline{F}_{13}\underline{F}_{33}^{-1}) \cdot \\
 & \left[\begin{array}{cc} \underline{H}^{-1} & \underline{H}^{-1}\underline{F}_{23}\underline{F}_{33}^{-1}(\underline{z}_k^{-1}\underline{1}-\underline{F}_{33}^{-1})^{-1} \\ -(\underline{z}_k^{-1}-\underline{F}_{33}^{-1})^{-1}\underline{F}_{33}^{-1}\underline{F}_{32}\underline{H}^{-1} & (\underline{z}_k^{-1}\underline{1}-\underline{F}_{33}^{-1})^{-1}(1-\underline{F}_{33}^{-1}\underline{F}_{32}\underline{H}^{-1}\underline{F}_{23}\underline{F}_{33}^{-1}(\underline{z}_k^{-1}-\underline{F}_{33}^{-1})^{-1}) \end{array} \right] \cdot \\
 & \cdot \begin{bmatrix} \underline{F}_{21}-\underline{F}_{23}\underline{F}_{33}^{-1}\underline{F}_{31} \\ -\underline{F}_{33}^{-1}\underline{F}_{31} \end{bmatrix} \quad (6.94)
 \end{aligned}$$

mit

$$\underline{H} = (\underline{z}_k^{-1}\underline{1}-\underline{F}_{22}+\underline{F}_{23}\underline{F}_{33}^{-1}\underline{F}_{32}+\underline{F}_{23}\underline{F}_{33}^{-1}(\underline{z}_k^{-1}\underline{1}-\underline{F}_{33}^{-1})^{-1}\underline{F}_{33}^{-1}\underline{F}_{32}) .$$

(6.91) eingesetzt in (6.94) ergibt

$$\begin{aligned}
 \text{r.S.} = & -\underline{F}_{13}\underline{F}_{33}^{-1}\underline{F}_{31}+(\underline{F}_{12}-\underline{F}_{13}\underline{F}_{33}^{-1}\underline{F}_{32}) \underline{H}^{-1}(\underline{F}_{21}-\underline{F}_{23}\underline{F}_{33}^{-1}\underline{F}_{31}) \\
 & -(\underline{F}_{12}-\underline{F}_{13}\underline{F}_{33}^{-1}\underline{F}_{32}) \underline{H}^{-1}\underline{F}_{23} \underline{W} \underline{F}_{31} \\
 & -\underline{F}_{13} \underline{W} \underline{F}_{32} \underline{H}^{-1}(\underline{F}_{21}-\underline{F}_{23}\underline{F}_{33}^{-1}\underline{F}_{31}) \\
 & -\underline{F}_{13} (\underline{W}-\underline{W} \underline{F}_{32} \underline{H}^{-1}\underline{F}_{23} \underline{W}) \underline{F}_{31} . \quad (6.95)
 \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Ausdrücke (6.92) und (6.95) erkennt man unmittelbar

$$\text{l.S.} = \text{r.S.}$$

q.e.d.

Setzt man (6.86) in Gleichung (6.61) ein, so kommt man zu dem überraschenden Ergebnis

$$\underline{S}(\underline{z}) = \underline{F}_{11} - \underline{F}_{13} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{31} + (\underline{F}_{12} - \underline{F}_{13} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{32}, \underline{F}_{13} \underline{F}_{33}^{-1}).$$

$$\begin{bmatrix} z_k^{-1} & 0 \\ 0 & z_k^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{F}_{22} - \underline{F}_{23} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{32} & \underline{F}_{23} \underline{F}_{33}^{-1} \\ -\underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{32} & \underline{F}_{33}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{F}_{21} - \underline{F}_{23} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{31} \\ -\underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{31} \end{bmatrix}. \quad (6.96)$$

Dieser Ausdruck kann wie folgt interpretiert werden.

Die rationale Matrix

$$\underline{S}^m(\underline{z}') := \begin{bmatrix} \underline{F}_{11} - \underline{F}_{13} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{31} & \underline{F}_{12} - \underline{F}_{13} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{32} & \underline{F}_{13} \underline{F}_{33}^{-1} \\ \underline{F}_{21} - \underline{F}_{23} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{31} & \underline{F}_{22} - \underline{F}_{23} \underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{32} & \underline{F}_{23} \underline{F}_{33}^{-1} \\ -\underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{31} & -\underline{F}_{33}^{-1} \underline{F}_{32} & \underline{F}_{33}^{-1} \end{bmatrix} \quad (6.97)$$

kann als die Streumatrix eines $(k-1)$ -dimensionalen Netzwerks N^m aufgefaßt werden, das nach Abschluß der letzten $2r$ Tore mit z_k -Reflektanzen und der Tore $(m+1)$ bis $(m+r)$ mit z_k^{-1} -Reflektanzen ein k -dimensionales m -Tor ergibt, das durch die gegebene Matrix $\underline{S}(\underline{z})$ beschrieben wird. Diese Aussage resultiert aus ähnlichen Betrachtungen wie in Abschnitt 4.2. Der Zusammenhang zwischen $\underline{S}^m$ und $\underline{S}$ wird durch Bild 6.4 verdeutlicht.

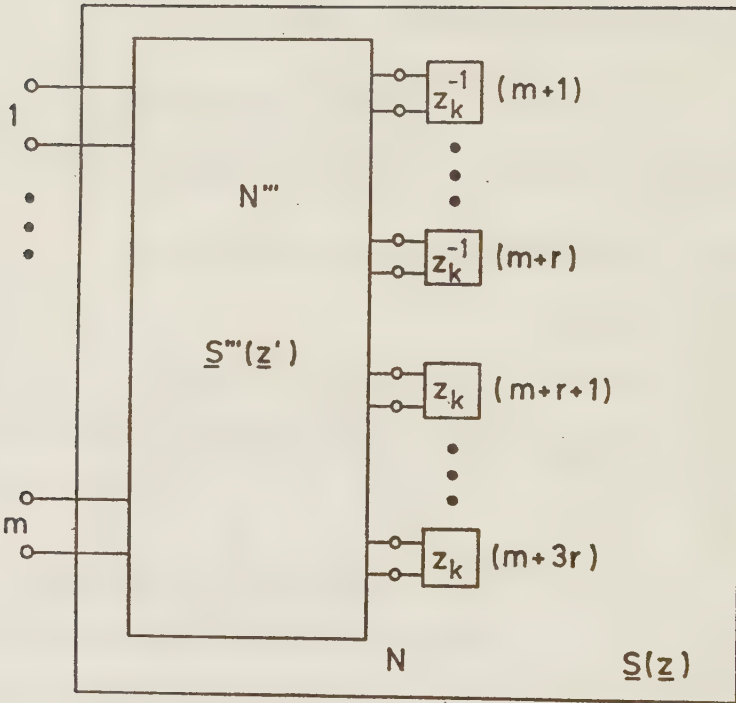


Bild 6.4

Da die Matrix $\underline{F}_{23}$ regulär ist, kann $\underline{S}'''$ immer aus den Blockelementen der Matrix $\underline{S}''$ (6.60) berechnet werden.

Satz 6.8:

Die durch Gleichung (6.97) definierte rationale Matrix $\underline{S}'''$ ist diskret paraunitär, d.h.

$$\underline{S}''' \underline{S}'''^* = \underline{1}_{m+3r} \quad (6.98)$$

Beweis:

Zunächst teile man die Matrix $\underline{G}$ (6.82) wie folgt in Blöcke auf:

$$\underline{G} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} m+r \\ 2r \\ m+r \quad 2r \end{array} \\ = & \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} & \underline{F}_{13} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} & \underline{F}_{23} \\ \underline{F}_{31} & \underline{F}_{32} & \underline{F}_{33} \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \quad (6.99)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (6.99) und (6.97) läßt sich $\underline{S}'''$ durch die oben definierten neuen Größen ausdrücken

$$\underline{S}''' = \begin{bmatrix} \underline{G}_{11}^{-1} \underline{G}_{12} \underline{G}_{22}^{-1} \underline{G}_{21} & \underline{G}_{12} \underline{G}_{22}^{-1} \\ -\underline{G}_{22}^{-1} \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (6.100)$$

Setzt man (6.99) in (6.83) ein, so ergibt sich

$$\underline{G}_{11} \underline{G}_{11}^{-1} - \underline{G}_{12} \underline{G}_{12}^{-1} = \underline{1}_{m+r} \quad (6.101a)$$

$$\underline{G}_{21} \underline{G}_{11}^{-1} - \underline{G}_{22} \underline{G}_{12}^{-1} = \underline{0} \quad (6.101b)$$

$$\underline{G}_{11} \underline{G}_{21}^{-1} - \underline{G}_{12} \underline{G}_{22}^{-1} = \underline{0} \quad (6.101c)$$

$$\underline{G}_{21} \underline{G}_{21}^{-1} - \underline{G}_{22} \underline{G}_{22}^{-1} = -\underline{1}_{2r} \quad (6.101d)$$

Da $\underline{F}_{33} = \underline{G}_{22}$ invertierbar ist, läßt sich auch schreiben

$$\underline{G}_{22}^{-1} \underline{G}_{21} \underline{G}_{11} = \underline{G}_{12} \quad (6.102a)$$

$$\underline{G}_{11} \underline{G}_{21} \underline{G}_{22}^{-1} = \underline{G}_{12} \quad (6.102b)$$

$$\underline{G}_{22}^{-1} (\underline{G}_{21} \underline{G}_{21}^{-1} \underline{1}_{2r}) \underline{G}_{22}^{-1} = \underline{1}_{2r} \quad (6.102c)$$

Mit Hilfe von (6.100) erhält man

$$\underline{S}^m \underline{S}^m = \left[\begin{array}{c|c} \underline{G}_{11} \quad \underline{G}_{11} - \underline{G}_{12} \quad (\underline{G}_{22}^{-1} \underline{G}_{21} \underline{G}_{11}) - (\underline{G}_{11} \underline{G}_{21} \underline{G}_{22}^{-1}) \underline{G}_{12} + \dots & \\ \hline -\underline{G}_{22}^{-1} \underline{G}_{21} \underline{G}_{11} + \underline{G}_{22}^{-1} (\underline{G}_{21} \underline{G}_{21} + 1) \underline{G}_{22}^{-1} \underline{G}_{12} & \\ \hline \dots + \underline{G}_{12} \underline{G}_{22}^{-1} (\underline{G}_{21} \underline{G}_{21} + 1) \underline{G}_{22}^{-1} \underline{G}_{12} & \begin{array}{c} -\underline{G}_{11} \underline{G}_{21} \underline{G}_{22}^{-1} + \underline{G}_{12} \underline{G}_{22}^{-1} (\underline{G}_{21} \underline{G}_{21} + 1) \underline{G}_{22}^{-1} \\ \underline{G}_{22}^{-1} (\underline{G}_{21} \underline{G}_{21} + 1) \underline{G}_{22}^{-1} \end{array} \end{array} \right]$$

und mit (6.102)

$$\underline{S}^m \underline{S}^m = \left[\begin{array}{c|c} \underline{G}_{11} \quad \underline{G}_{11} - \underline{G}_{12} \quad \underline{G}_{12} - \underline{G}_{12} \quad \underline{G}_{12} + \underline{G}_{12} \quad \underline{G}_{12} & -\underline{G}_{12} + \underline{G}_{12} \\ \hline -\underline{G}_{12} + \underline{G}_{12} & 1_{2r} \end{array} \right]$$

und mit (6.101a)

$$\underline{S}^m \underline{S}^m = \left[\begin{array}{cc} 1_{m+r} & 0 \\ 0 & 1_{2r} \end{array} \right] = 1_{m+3r}.$$

q.e.d.

Die neu gewonnene Matrix $\underline{S}^m(\underline{z}')$ ist aufgrund von Satz 6.8 ein Element aus Ω_u und kann deshalb, ebenso wie $\underline{S}(\underline{z})$, als Basis für das vorgestellte Verfahren dienen. Als Ergebnis eines solchen erneuten Syntheseschritts erhält man eine Matrix aus Ω_u , die nur noch von $(k-2)$ Variablen abhängt. Nach insgesamt k solcher Extraktionszyklen bleibt eine konstante, unitäre Matrix übrig, die mit dem in A 5 vorgestellten Syntheseverfahren realisiert werden kann. Das auf diese Weise erhaltene verlustlose, konstante Netzwerk wird nun sukzessive mit den entsprechenden Reflektanzen abgeschlossen, wodurch man ein k -dimensionales m -Tor erhält, das durch die vorgegebene Matrix $\underline{S}(\underline{z}) \in \Omega_u$ beschrieben wird.

Da

$$\Omega_z \subset \Omega_u,$$

so findet man für jede Matrix aus Ω_z eine zugehörige Schaltung. Ein solches Netzwerk kann zwar noch als Referenznetzwerk für ein Wellendigitalfilter dienen, jedoch ist die so erzeugte Realisierung von $\underline{S}(z)$ nicht mehr konkret passiv. Deshalb kann die Stabilität des Netzwerks unter nichtlinearen Bedingungen (Quantisierung von Signal und Multipliziererkoeffizienten) nicht mehr gewährleistet werden, wodurch eine praktische Anwendbarkeit solcher Strukturen ausgeschlossen ist.

7. Rückführung eines k-D-Digitalfilters auf ein 1-D-Digitalfilter

7.1 Prinzip der Rückführung

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, daß eine allgemeine Lösung des Syntheseproblems für k-dimensionale Reaktanzmehrtore nicht möglich ist. Da solche Netzwerke jedoch die Basis für den Entwurf mehrdimensionaler Wellendigitalfilter bilden [1, 2], gilt eine entsprechende Aussage auch für diese Klasse von Digitalfilterstrukturen. Schaltungen, wie sie in Abschnitt 6.3 realisiert wurden, können hierbei nicht in Betracht gezogen werden, da das Konzept der Stabilität von Wellendigitalfiltern auf der Passivität eines jeden einzelnen Bauelements der Schaltung beruht und somit negative Kapazitäten ausgeschlossen sind.

Steht man nun vor dem Problem, ein mehrdimensionales Wellendigitalfilter zu entwerfen, dessen Matrixbeschreibung jedoch nicht zu einem passiven Referenzfilter führt, so kann nachfolgende Betrachtung aus diesem Dilemma führen.

Die Simulation eines k-dimensionalen Systems auf einem Digitalrechner ist in der Praxis nur dann durchführbar, wenn die Länge des Eingangsdatenfeldes bezüglich mindestens $(k-1)$ Dimensionen endlich ist. Diese Einschränkung bereitet gewöhnlich keine Probleme, da meist nur die Zeitvariable unbegrenzt ist. Die Abarbeitung des Eingangsdatenfeldes erfolgt sequentiell, d.h., man wählt einen geeigneten Pfad (vergl. Bild 7.1) durch dieses Feld, der nun wiederum als eine eindimensionale Kurve im k-dimensionalen Raum interpretiert werden kann.

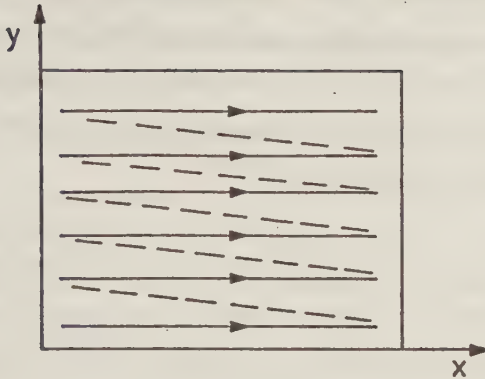


Bild 7.1 Sequentielle Abarbeitung eines endlichen zweidimensionalen Datenfeldes

Durch Aneinanderketten der einzelnen Teilstücke des Eingangsdatenfeldes erhält man eine eindimensionale Zahlenfolge, die einem System zugeführt wird. Die Ausgangsfolge dieses Filters wird entsprechend in Teilstücke zerlegt und zu einem k -dimensionalen Datenfeld zusammengefaßt. Prinzipiell ist somit jedes mehrdimensionale Digitalfilter als ein eindimensionales System interpretierbar. Falls nun ein Zusammenhang zwischen der k -dimensionalen Beschreibung des Systems und der eindimensionalen Interpretation hergestellt werden kann, so wäre der Entwurf auf das bekannte eindimensionale Problem reduziert. Ein solcher Zusammenhang würde sicherlich von der Wahl des Abarbeitungspfades, d.h. der Zuordnung zwischen dem mehrdimensionalen Datenfeld und der eindimensionalen Zahlenfolge, abhängig und i.a. äußerst kompliziert sein. Bei einer Abarbeitung parallel zu den Abtastvektoren [33] des mehrdimensionalen Raumes führt eine überraschend einfache Transformation zur Übertragungsfunktion des äquivalenten eindimensionalen Systems.

Man muß hier demgemäß zwischen zwei verschiedenen Transformationen unterscheiden, einmal die Zuordnung des Datenfeldes zu einer eindimensionalen Folge und zweitens den Zusammenhang zwischen der multidimensionalen Beschreibung des Übertragungssystems und der äquivalenten eindimensionalen Interpretation.

Bei einer Abarbeitung parallel zu den Abtastvektoren ist die erstgenannte Zuordnungsvorschrift vergleichsweise trivial herzustellen und wurde für den zweidimensionalen Fall von Mersereau untersucht [34]. Auch in der Theorie der Polyphasenfilter treten ähnliche Problemstellungen auf (vergl. [63], weitere Literaturstellen findet man in [64]).

Man betrachte ein k -dimensionales Datenfeld $x(n_1, n_2, \dots, n_k)$, wobei

$$\begin{aligned} 0 \leq n_1 &< N_1, \\ 0 \leq n_2 &< N_2, \\ &\vdots \\ 0 \leq n_{k-1} &< N_{k-1}, \\ 0 \leq n_k &. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Das Datenfeld x ist also lediglich bezüglich der Variablen n_k unbegrenzt.

Die Zuordnungsvorschrift zwischen $x(n_1, n_2, \dots, n_k)$ und einer eindimensionalen Zahlenfolge $u(n)$ laute

$$x(n_1, n_2, \dots, n_k) \rightarrow u\left(n_1 + \sum_{i=2}^k n_i \prod_{l=1}^{i-1} N_l\right). \quad (7.2)$$

Es muß nun gezeigt werden, daß zwei verschiedene k -Tupel $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ auf zwei verschiedene Glieder der Folge $u(n)$ abgebildet werden.

Falls sich zwei k -Tupel $(n_1, \dots, n_k)$ und $(n'_1, \dots, n'_k)$ nur bezüglich der ersten Komponente n_1 bzw. n'_1 unterscheiden, so werden ihnen offensichtlich zwei verschiedene u -Glieder mit (7.2) zugeordnet. Somit genügt es, den Fall zu betrachten, daß wenigstens eine der Komponenten 2 bis k von $(n_1, \dots, n_k)$ sich von der entsprechenden des k -Tupels $(n'_1, \dots, n'_k)$ unterscheidet.

Im folgenden gelte

$$n_K = n'_K + n_0, \text{ mit } 2 \leq K \leq k, n_0 \geq 1, \quad (7.3a)$$

und

$$n_i = n'_i \quad \text{für} \quad i = K+1, \dots, k. \quad (7.3b)$$

Den beiden k -Tupeln $(n_1, \dots, n_k)$ und $(n'_1, \dots, n'_k)$ werden nun mit Hilfe von (7.2) die natürlichen Zahlen

$$n = n_1 + \sum_{i=2}^k n_i \prod_{l=1}^{i-1} N_l \quad (7.4a)$$

und

$$n' = n'_1 + \sum_{i=2}^k n'_i \prod_{l=1}^{i-1} N_l \quad (7.4b)$$

zugeordnet.

Mit Hilfe von (7.1) erhält man aus (7.4b)

$$n' \leq N_1^{-1} + \sum_{i=2}^{K-1} (N_i^{-1}) \prod_{l=1}^{i-1} N_l + \sum_{i=K}^k n'_i \prod_{l=1}^{i-1} N_l,$$

$$n' \leq N_1^{-1} + \sum_{i=3}^K \prod_{l=1}^{i-1} N_l - \sum_{i=2}^{K-1} \prod_{l=1}^{i-1} N_l + \sum_{i=K}^k n'_i \prod_{l=1}^{i-1} N_l,$$

$$n' \leq N_1^{-1} + \prod_{l=1}^{K-1} N_l - N_1 + \sum_{i=K}^k n'_i \prod_{l=1}^{i-1} N_l,$$

$$n' < (n'_K + 1) \prod_{l=1}^{K-1} N_l + \sum_{i=K+1}^k n'_i \prod_{l=1}^{i-1} N_l,$$

und mit (7.3)

$$n' < n_K \prod_{l=1}^{K-1} N_l + \sum_{i=K+1}^k n_i \prod_{l=1}^{i-1} N_l,$$

und mit (7.4a)

$$n' < n,$$

d.h.

$$n' \neq n.$$

Umgekehrt kann nun jedes $n \in \mathbb{N}$ durch folgenden eindeutigen Algorithmus auf ein k -Tupel $(n_1, \dots, n_k)$ abgebildet werden:

$$u(n) \rightarrow x(n_1, n_2, \dots, n_k), \quad (7.5)$$

mit

$$n_k = \frac{n - r_k}{\prod_{l=1}^{k-1} N_l}, \quad r_k = n \bmod \prod_{l=1}^{k-1} N_l,$$

$$n_{k-1} = \frac{r_k - r_{k-1}}{\prod_{l=1}^{k-2} N_l}, \quad r_{k-1} = r_k \bmod \prod_{l=1}^{k-2} N_l,$$

$$\begin{array}{c}
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 n_i = \frac{r_{i+1} - r_i}{\prod_{l=1}^{i-1} N_l}, \quad r_i = r_{i+1} \bmod \prod_{l=1}^{i-1} N_l, \quad (7.6) \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 n_1 = r_2.
 \end{array}$$

Damit (7.2) und (7.5) zusammen eine eindeutige Transformation ergeben, muß nachgewiesen werden, daß für jedes n_i des durch (7.6) aus n erzeugten k -Tupels $(n_1, \dots, n_k)$ gilt

$$0 \leq n_i < N_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

und daß umgekehrt dieses Tupel $(n_1, \dots, n_k)$ durch (7.2) wieder auf das erzeugende n abgebildet wird.

Aus den Rekursionsgleichungen (7.6) folgt

$$r_{i+1} = n_i \prod_{l=1}^{i-1} N_l + r_i, \quad r_{i+1} < \prod_{l=1}^i N_l, \quad i=1, \dots, k-1, \quad (7.7)$$

d.h.

$$r_{i+1} \geq n_i \prod_{l=1}^{i-1} N_l, \quad r_{i+1} < \prod_{l=1}^i N_l,$$

$$n_i \prod_{l=1}^{i-1} N_l < \prod_{l=1}^i N_l,$$

$$n_i < N_i, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Außerdem folgt für $r_{k+1} = n$ und $r_2 = n_1$ aus (7.7)

$$n = \sum_{i=2}^k n_i \prod_{l=1}^{i-1} N_l + n_1, \quad (7.8)$$

d.h., die Rekursion (7.6) ist eindeutig nach n auflösbar, wodurch zwei verschiedene Werte n auch auf zwei verschiedene k -Tupel abgebildet werden. Des weiteren entspricht (7.8) der Transformationsvorschrift (7.2), womit die Eineindeutigkeit der Abbildung bewiesen wäre.

Nun soll der Zusammenhang zwischen x und u im Frequenzbereich untersucht werden. Hierzu bilde man die z -Transformierte der Zahlenfolge $u(n)$ und teile die unendliche Summe in Teilsummenausdrücke auf:

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-n}, \quad (7.9)$$

$$U(z) = \sum_{n_k=0}^{\infty} \sum_{n_{k-1}=0}^{N_{k-1}-1} \dots \sum_{n_1=0}^{N_1-1} u(n_1 + \sum_{i=2}^k n_i \prod_{l=1}^{i-1} N_l) z^{-(n_1 + \sum_{i=2}^k n_i \prod_{l=1}^{i-1} N_l)},$$

$$U(z) = \sum_{n_k=0}^{\infty} \sum_{n_{k-1}=0}^{N_{k-1}-1} \dots \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_1, n_2, \dots, n_k) z^{-n_1} \prod_{i=2}^k \left[z^{\prod_{l=1}^{i-1} N_l} \right]^{-n_i},$$

$$U(z) = X(z, z^{N_1}, z^{N_1 N_2}, \dots, z^{\prod_{l=1}^{k-1} N_l}), \quad (7.10)$$

wo $X(z_1, z_2, \dots, z_k)$ die z -Transformierte des Datenfeldes $x(n_1, n_2, \dots, n_k)$ ist.

Dieses Datenfeld x werde nun durch ein System S_1 geschickt, dessen Ausgangsdatenfeld mit $y(n_1, n_2, \dots, n_k)$ bezeichnet wird (siehe Bild 7.2).

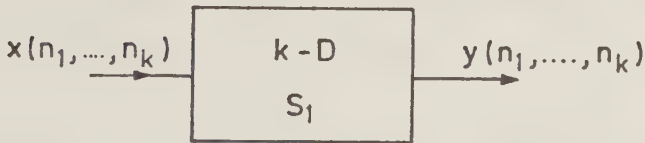


Bild 7.2

Das System S_1 sei im folgenden

- linear
- zeitinvariant
- kausal
- streng stabil.

Solche Systeme können durch lineare, konstante Differenzengleichungen beschrieben werden, deren Lösungen y sich in einen sogenannten homogenen Anteil y_h und einen partikulären Anteil y_p zerlegen lassen.

Die partikuläre Lösung, bei der zu Beginn der Verarbeitung alle Energiespeicher entladen waren, d.h. alle Anfangs- bzw. Randwerte null waren, wird im folgenden als Grundantwort bezeichnet.

Die Grundantwort wird lediglich durch die Übertragungsfunktion $H_1(\underline{z})$ und das Eingangsdatenfeld x bestimmt, während der homogene Anteil stark von den Anfangsbedingungen abhängt, d.h. dem Zustandsvektor des Systems für alle diejenigen Werte von $(n_1, \dots, n_k)$, bei denen mindestens eines der $n_i=0$ ist, $i=1$ bis k . Die $\underline{z}$ -Transformierte der Grundantwort erhält man durch Multiplikation der $\underline{z}$ -Transformierten des Eingangsdatenfeldes mit der Übertragungsfunktion $H_1(\underline{z})$:

$$Y_p(\underline{z}) = H_1(\underline{z})X(\underline{z}). \quad (7.11)$$

Für die $\underline{z}$ -Transformierte des Ausgangssignals von S_1 ergibt sich somit

$$Y(\underline{z}) = Y_p(\underline{z}) + Y_h(\underline{z}) = H_1(\underline{z})X(\underline{z}) + Y_h(\underline{z}). \quad (7.12)$$

Das Ausgangsdatenfeld $y(n_1, \dots, n_k)$ wird in zwei Datenbereiche zerlegt,

$$y = y_1 + y_2, \quad (7.13)$$

mit

$$y_1(n_1, \dots, n_k) = \begin{cases} y(n_1, \dots, n_k) & \text{für } n_i < N_i, i=1, \dots, k-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$y_2 = y - y_1.$$

Da das Eingangssignal x für all jene k -Tupel $(n_1, \dots, n_k)$ null ist, für die das Signal y_2 von null verschiedene Werte haben kann, so ist y_2 eindeutig durch den Zustandsvektor $w(n_1, \dots, n_k)$ des Systems S_1 für

$$(n_1, \dots, n_k) \in \Omega \quad (7.14)$$

bestimmt, wobei Ω die Menge aller k -Tupel $(n_1, \dots, n_k)$ repräsentiert, für die mindestens eines der $n_i = N_i$ ist, $1 \leq i \leq k-1$, und

$$n_j \leq N_j \quad \forall \quad j = 1, \dots, k-1.$$

y_2 beschreibt somit das Abklingverhalten des Systems S_1 nach Abschaltung des Eingangssignals. Bei streng stabilen Systemen fällt das Signal y_2 rasch auf null ab, wodurch seine Energie i.a. klein im Verhältnis zur Energie von y_1 ist.

Das Signal y_1 genügt offensichtlich den Bedingungen (7.1), wodurch sich ihm über die Transformation (7.2) eine eindimensionale Zahlenfolge $v_1(n)$ zuordnen läßt, deren z -Transformierte wie folgt von der z -Transformierten von y_1 abhängt:

$$V_1(z) = Y_1(z, z^{N_1}, \dots, z^{\prod_{l=1}^{k-1} N_l}). \quad (7.15)$$

Nun betrachte man ein lineares, zeitinvariantes, kausales System S_2 , mit der Übertragungsfunktion

$$H_2(z) = H_1(z, z^{N_1}, \dots, z^{\prod_{l=1}^{k-1} N_l}). \quad (7.16)$$

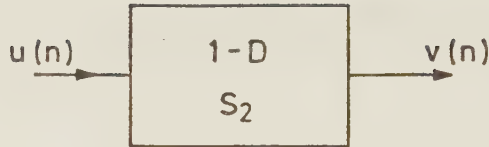


Bild 7.3

Schickt man das Signal $u(n)$ durch das System S_2 , so läßt sich wiederum die Ausgangsfolge $v(n)$ in einen homogenen Anteil $v_h(n)$ und die Grundantwort $v_p(n)$ zerlegen. Im folgenden werden die Anfangswerte des Systems S_2 null gesetzt, wodurch stets

$$v(n) = v_p(n)$$

ist. Für die z-Transformierte von $v(n)$ erhält man also

$$V(z) = H_2(z) U(z). \quad (7.17)$$

Nun soll der Zusammenhang zwischen $v_1(n)$ und $v(n)$ bzw. $V_1(z)$ und $V(z)$ hergeleitet werden. Mit Hilfe von (7.17), (7.16), (7.10) und (7.12) erhält man

$$V(z) = Y(z, \dots, z^{\prod_{l=1}^{k-1} N_l}) - Y_h(z, \dots, z^{\prod_{l=1}^{k-1} N_l}),$$

und mit (7.13) und (7.15)

$$V(z) = v_1(z) + Y_2(z, \dots, z^{\prod_{l=1}^{k-1} N_l}) - Y_h(z, \dots, z^{\prod_{l=1}^{k-1} N_l}). \quad (7.18)$$

Für die Energie der Abweichung zwischen $v(n)$ und $v_1(n)$ ergibt sich mit (7.18) und aufgrund des Parsevalschen Theorems [65, Kapitel 2.3.10]

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v(n) - v_1(n))^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Y_2(e^{j\omega}, \dots, e^{j\omega \prod_{l=1}^{k-1} N_l}) - Y_h(e^{j\omega}, \dots, e^{j\omega \prod_{l=1}^{k-1} N_l})|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung [66, Kapitel 3.1.7.2], der Dreiecksungleichung [66, Kapitel 2.4.1.5] und der Transformationsformel der z -Transformation erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v(n) - v_1(n))^2 &\leq \max_{(\omega_1, \dots, \omega_k)} |Y_2(e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_k}) - Y_h(e^{j\omega_1}, \dots, e^{j\omega_k})|^2 \\ &= |Y_2(e^{j\omega_1 0}, \dots, e^{j\omega_k 0}) - Y_h(e^{j\omega_1 0}, \dots, e^{j\omega_k 0})|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v(n) - v_1(n))^2 &\leq \left| \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} (Y_2(n_1, \dots, n_k) - Y_h(n_1, \dots, n_k)) \cdot e^{-j\omega_1 0 n_1} \dots e^{-j\omega_k 0 n_k} \right|^2 \\ &\leq \left(\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} (|Y_2(n_1, \dots, n_k)| + |Y_h(n_1, \dots, n_k)|) \right)^2. \quad (7.19) \end{aligned}$$

Ist also die Energie der Signale y_2 und y_h klein, so wird der Fehler zwischen $v(n)$ und $v_1(n)$ ebenfalls klein, wodurch $v(n)$ nach Transformation mit (7.5) ein k -dimensionales Datenfeld ergibt, das

äquivalent zu $y_1(n_1, \dots, n_k)$ ist. Falls aber

$$y_2(z, \dots, z^{\prod_{l=1}^{k-1} N_l}) = y_h(z, \dots, z^{\prod_{l=1}^{k-1} N_l}) \quad (7.20)$$

ist, dann sind gemäß (7.18) die Signale $v(n)$ und $v_1(n)$ sogar identisch.

Dies kann jedoch stets durch geeignete Wahl der Anfangs- bzw. Randwerte des Zustandsvektors von S_1 bei der Verarbeitung des k -dimensionalen Signals x garantiert werden. Um die Notation übersichtlicher zu gestalten, soll dies für $k=2$ gezeigt werden. Die Erweiterung auf $k>2$ ist analog zu beweisen.

Satz 7.1:

Sei $\underline{w}(n_1, n_2)$ der Zustandsvektor des in Bild 7.2 dargestellten Systems S_1 , so ist

$$y_2(z, z^{N_1}) = y_h(z, z^{N_1}),$$

falls

$$\underline{w}(0, n_2) = \underline{w}(N_1, n_2-1) \quad \text{für} \quad n_2 \geq 1 \quad (7.21a)$$

und

$$\underline{w}(n_1, 0) = \underline{0} \quad \text{für} \quad n_1 \geq 0. \quad (7.21b)$$

Beweis:

Falls der partikuläre Anteil des Ausgangssignals von S_1 gleich der Grundantwort gewählt wird, so erhält man das zugehörige homogene Signal $y_h(n_1, n_2)$ alleine am Ausgang von S_1 , wenn das Eingangssignal gleich null gesetzt wird und die Randwerte für $\underline{w}$ ebenso wie bei der Verarbeitung von x gewählt werden.

Wie bereits diskutiert, erhält man dagegen das Signal $y_2(n_1, n_2)$ alleine am Ausgang von S_1 , wenn das Eingangssignal gleich null gesetzt wird und $\underline{w}(N_1, n_2)$ und $\underline{w}(n_1, 0)$ ebenso wie bei der Verarbeitung von $x(n_1, n_2)$ gewählt werden. Aufgrund der Zeitinvarianz des Systems S_1 erhält man somit bei Wahl der Anfangswerte gemäß (7.21) die Beziehung

$$y_2(n_1, n_2) = y_h(n_1 - N_1, n_2 + 1),$$

d.h.

$$Y_2(z_1, z_2) = z_1^{-N_1} z_2 Y_h(z_1, z_2),$$

$$Y_2(z, z^{-1}) = Y_h(z, z^{-1}).$$

q.e.d.

7.2 Einfluß des Anfangszustandes

Wie bereits angedeutet, hängt das Verhalten des Systems S_1 für kleine Werte von $n_1, \dots, n_k$ stark von den sog. Anfangs- oder Randwerten des Zustandsvektors ab. Bei geeigneter Wahl dieser Startwerte in den Verzögerungen (Speichern) einer gewählten Realisierung von $H_1(z)$ ist sogar eine Äquivalenz des Signals y_1 mit dem Ausgangssignal des Systems S_2 für alle Werte n möglich.

In der Praxis herrscht meist Unsicherheit bezüglich einer geeigneten Wahl der Startwerte, weshalb diese oft willkürlich gleich null gesetzt werden. Aus diesem Grunde hätte jede beliebige andere Wahl der Randbedingungen gleiche Berechtigung und damit auch die oben erwähnten optimalen Startwerte für die Erzielung einer idealen Anpassung der Systeme S_1 und S_2 . Falls also in einem konkreten Anwendungsfall die Startwerte beliebig gewählt werden dürfen, so kann die Beziehung (7.16) als Grundlage für die Synthese dienen, da $H_2(z)$ mit bekannten Methoden in ein Signalflußdiagramm umgesetzt werden kann. Existiert bereits ein Digitalnetzwerk für das System S_1 , so erhält man eine Realisierung des Systems S_2 , indem man jede z_i^{-1}

Verzögerung in S_1 durch eine Kette von $\prod_{l=1}^{i-1} N_l$ z -Verzögerungen ersetzt.

Ziel der bisherigen Diskussion war die optimale Anpassung von $v(n)$ an $y_1(n_1, \dots, n_k)$. Beim Entwurf eines Digitalfilters interessiert jedoch nur die Grundantwort im Ausgangssignal, d.h. der eingeschwungene Systemzustand. Denn bei fast allen Entwurfsverfahren ist man bemüht, die Übertragungsfunktion $H_1(z)$ des geplanten Systems optimal an vorgeschriebene Toleranzschemata anzupassen, d.h., man interessiert sich nur für den eingeschwungenen Zustand. Deshalb sind solche Strukturen zu bevorzugen, die ein rasches Abklingen des

homogenen Anteils im Ausgangssignal gewährleisten, da dieser als Störanteil aufgefaßt werden kann. Als besonders günstig haben sich hierbei Wellendigitalfilter erwiesen, da diese, infolge ihrer Antwortstabilität und inkrementalen Pseudopassivität [39], den Einfluß des Anfangszustandes auf das Ausgangssignal rasch abklingen lassen.

Damit ist aber $y_1(n_1, \dots, n_k)$ für größere Werte von $n_1, \dots, n_k$ beinahe unabhängig von den Randwerten des Zustandsvektors $\underline{w}$ und somit in diesem Datenbereich nicht mehr von dem Ausgangssignal unterscheidbar, das durch die oben erwähnten optimalen Randwerte erzeugt würde. Daher ist die Äquivalenz von $v(n)$ und $y_1(n_1, \dots, n_k)$ in diesem Bereich sogar für beliebige Randwerte gesichert.

7.3 Entwurf multidimensionaler Wellendigitalfilter

Wie bereits erwähnt, bilden multidimensionale Reaktanznetzwerke die Basis für den Entwurf von k-D Wellendigitalfiltern. Da jedoch nicht für jede Matrix $\underline{A}(\underline{p})$ aus Ω_p eine solche verlustlose Schaltung existiert, so muß eine alternative Vorgehensweise gewählt werden. Abhilfe kann in solchen Fällen die bereits geschilderte Rückführung der Synthese auf das eindimensionale Problem bieten.

Satz 7.2:

Sei $\underline{S}_1(z_1, z_2, \dots, z_k)$ ein Element aus Ω_z , so ist die eindimensionale Matrix

$$\underline{S}_2(z) := \underline{S}_1(z, z^{\prod_{l=1}^{k-1} N_1}, \dots, z^{\prod_{l=1}^{k-1} N_1}) \quad (7.22)$$

ebenfalls ein Element aus Ω_z .

Beweis:

i) $\underline{S}_2(z)$ ist offensichtlich rational in z , da $\underline{S}_1$ rational in $(z_1, \dots, z_k)$ ist.

$$\text{ii) } |z| > 1 \rightarrow |z_i| = |z^{\prod_{l=1}^{i-1} N_1}| > 1$$

Somit ist $\underline{S}_2(z)$ holomorph für $|z| > 1$, da $\underline{S}_1(\underline{z})$ holomorph ist für $|\underline{z}| > 1$.

$$\text{iii) } \underline{S}_2 \underline{S}_2 = \underline{S}_1(z, \dots, z^{\prod_{l=1}^{k-1} N_1}) \underline{S}_1(z, \dots, z^{\prod_{l=1}^{k-1} N_1}) = \underline{1}.$$

Ein Vergleich mit Definition 3.1 zeigt die Richtigkeit der Behauptung.

q.e.d.

Somit ist es stets möglich, für jede Matrix $\underline{S}_1(z_1, \dots, z_k) \in \Omega_z$ mit Hilfe der Beziehung (7.22) eine äquivalente Streumatrix $\underline{S}_2(z) \in \Omega_z$ zu finden, die mit bekannten Methoden oder dem in Kapitel 4 beschriebenen Verfahren realisiert werden kann. Auf den ersten Blick, scheint diese Methode auch ein gleichwertiger Ersatz für die in Abschnitt 4 beschriebene zweidimensionale Synthese von Reaktanzmehrfaktoren zu sein. Dies ist jedoch ein Trugschluß, da der Grad von $\underline{S}_2(z)$ aufgrund der Transformation (7.22) bei großen Datenfeldern, d.h. großen N_1 , enorm anwachsen kann und somit auch die Anzahl der notwendigen Multiplikationen und Additionen. Der Aufwand an Speicherplätzen muß sich dagegen nicht erhöhen. Außerdem müßte die Synthese bei Vergrößerung des Eingangsdatenfeldes erneut durchgeführt werden, während eine mehrdimensionale Struktur unabhängig von solchen Einflüssen ist.

Besondere Vorteile könnte jedoch das in diesem Abschnitt vorgestellte Verfahren für den Entwurf mehrdimensionaler Reaktanzzweifaktoren bieten. Hierzu sollen zunächst die Begriffe "kanonische Form der Streumatrix" und "charakteristische Funktion" kurz erläutert werden [11, 35, 36].

Jede (2×2) -Matrix $\underline{A}(p)$ ist genau dann ein Element aus Ω_p , wenn sie sich in folgender Form schreiben läßt:

$$\underline{A}(p) = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} h & \sigma f_* \\ f & -\sigma h_* \end{bmatrix}, \quad (7.23)$$

wo h , f und g Polynome in p sind und σ eine unimodulare Konstante ist, d.h. $|\sigma| = 1$. Außerdem müssen noch folgende Bedingungen erfüllt sein:

i) g ist ein Haupt-Hurwitzpolynom,

ii) $gg_* = hh_* + ff_*$. (7.24)

Die charakteristische Funktion $\Psi(\underline{p})$ ist definiert durch

$$\Psi(\underline{p}) = \frac{h(\underline{p})}{f(\underline{p})},$$

wobei h und f in (7.23) eingeführt wurden. Falls $\underline{A}(\underline{p})$ die Streumatrix eines Reaktanzzweites N darstellt, so hängt die Betriebsdämpfung $A_{dB}(\underline{\omega})$ dieses Filters in folgender Weise von $\Psi(\underline{p})$ ab:

$$A_{dB}(\underline{\omega}) = 10 \log (1 + |\Psi(j\underline{\omega})|^2) \text{ dB}. \quad (7.25)$$

Bei eindimensionalen Filteranwendungen wird gewöhnlich die rationale Funktion $\Psi(\underline{p})$ auf der Basis eines Toleranzschemas für $A_{dB}(\underline{\omega})$ über die Beziehung (7.25) optimiert. Das somit gewonnene Zählerpolynom von Ψ wird h und das Nennerpolynom wird f genannt. Über die Gleichung (7.24) läßt sich stets ein Haupt-Hurwitzpolynom g derart finden, daß (7.24) erfüllt ist. Nach freier Wahl von σ ist die Streumatrix $\underline{A}(\underline{p})$ des gesuchten Netzwerks N bereits vollständig festgelegt und kann nun mit bekannten Methoden (z.B. [35, 37, 38]) synthetisiert werden.

Beim Entwurf mehrdimensionaler Reaktanzfilter ist dieses Verfahren nicht mehr anwendbar, da bei vorgegebener charakteristischer Funktion $\Psi(\underline{p})$ das Polynom $(hh_* + ff_*)$ i.a. nicht in ein Produkt gg_* zerlegt werden kann.

Soll jedoch das gesuchte Reaktanzfilter als Referenznetzwerk für ein Wellendigitalfilter dienen, so läßt sich durch Rückführung des mehrdimensionalen Systems auf ein eindimensionales Filter dieses Problem der Faktorisierbarkeit von $(hh_* + ff_*)$ umgehen. Hierzu führt

man die Transformation (7.16) bereits für die charakteristische Funktion $\psi_1(\underline{p})$ aus und zwar unter Zuhilfenahme der Beziehung (3.4):

$$\psi_2(\underline{p}) := \psi_1(\underline{p}, \frac{[\frac{1+p}{1-p}]^{\alpha_2} - 1}{[\frac{1+p}{1-p}]^{\alpha_2} + 1}, \dots, \frac{[\frac{1+p}{1-p}]^{\alpha_k} - 1}{[\frac{1+p}{1-p}]^{\alpha_k} + 1}), \quad (7.26)$$

mit

$$\alpha_i = \prod_{l=1}^{i-1} N_l \quad \text{für} \quad i=2, \dots, k.$$

Die neue charakteristische Funktion $\psi_2(\underline{p})$ hängt nur noch von einer Variablen ab, wodurch der Filterentwurf mit dem bereits geschilderten Verfahren durchgeführt werden kann.

Allerdings hängt auch bei diesem Entwurfsverfahren der Bauelementaufwand stark von der Größe des Eingangsdatenfeldes des Wellendigitalfilters ab.

8. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Synthese mehrdimensionaler Reaktanzmehrtore auf der Grundlage einer vorgegebenen Matrixbeschreibung des gesuchten Netzwerks. Ausgangspunkt sind notwendige Eigenschaften der Streumatrix solcher Schaltungen, die sich bei eindimensionalen Netzwerken auch als hinreichend erwiesen haben. Nach einer kurzen Einführung in das Konzept mehrdimensionaler Reaktanzsysteme wird die Hinlänglichkeit der oben erwähnten Eigenschaften auch für Matrizen in zwei Variablen gezeigt. Außerdem wird ein Verfahren entwickelt, das die Synthese nach vorgegebener Streumatrixbeschreibung für diese Netzwerke ermöglicht. Die resultierende Schaltung enthält stets eine minimale Anzahl reaktiver Bauelemente. Basierend auf der bekannten Tatsache, daß jedes allgemeine Syntheseverfahren zugleich einen Test für Haupt-Hurwitzpolynome beinhaltet, werden anschließend Bedingungen angegeben, die sowohl notwendig als auch hinreichend sind, um die Zugehörigkeit eines vorgegebenen Polynoms in zwei Variablen zur Klasse der Haupt-Hurwitzpolynome zu überprüfen. Hierbei müssen lediglich die Nullstellen von Polynomen in einer Variablen ermittelt werden, was mit numerischen Verfahren stets möglich ist.

Das sechste Kapitel wendet sich den verlustlosen Netzwerken in mehr als zwei Dimensionen zu. Die naheliegende Vermutung der Existenz eines allgemeinen Syntheseverfahrens auf der Grundlage der bereits erwähnten notwendigen Eigenschaften der Streumatrix solcher Schaltungen wird nicht bestätigt. Im Gegenteil, durch Konstruktion eines Gegenbeispiels wird gezeigt, daß diese Bedingungen i.a. nicht hinreichend sind für die Existenz einer Schaltung bei vorgegebener Matrixbeschreibung. Es ist jedoch möglich, stets ein Netzwerk zu finden, das neben den üblichen Bauelementen auch negative reaktive

Elemente enthält und durch die vorgegebene Matrix beschrieben wird. Dieses Ergebnis ist lediglich von theoretischem Interesse, da die Stabilität von Wellendigitalfiltern, die aus solchen Referenzstrukturen gewonnen werden, unter nichtlinearen Bedingungen (Überlaufkorrektur, Diskretisierung der Multipliziererkoeffizienten) nicht mehr garantiert werden kann.

Das letzte Kapitel befaßt sich mit der Rückführung mehrdimensionaler Digitalfilter auf eindimensionale Systeme, falls das Eingangsdatenfeld bis auf eine Dimension begrenzt ist. Dieses Verfahren kann in solchen Fällen dienen, für die eine multidimensionale Synthese nicht möglich ist. Hierbei kann vor allem auf bekannte Entwurfsverfahren für eindimensionale Filterschaltungen zurückgegriffen werden, falls z.B. die charakteristische Funktion eines gesuchten Reaktanzzweiters vorgegeben ist. Besonders nachteilig wirkt sich die Abhängigkeit der gefundenen Struktur von der Größe des Eingangsdatenfeldes aus, da besonders der Aufwand an Multiplizierern und Addierern gegenüber anderen Netzwerken enorm ansteigen kann.

In weiterführenden Untersuchungen könnte geklärt werden, ob ein Satz notwendiger Eigenschaften der Streumatrix eines mehrdimensionalen Reaktanzmehrtors existiert, der auch hinreichend für ein allgemeines Syntheseverfahren ist. Zu den bereits bekannten Eigenschaften müssen sicherlich Aussagen über die Zerlegung gewisser Polynommatrizen in eine Summe von Polynommatrixquadraten hinzukommen. Vermutlich sind derartige Bedingungen jedoch so restriktiv, daß ihr praktischer Nutzen äußerst fraglich erscheint, da sie für den Entwurf mehrdimensionaler Filterstrukturen wenig praktikabel und handlich sein dürften.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. A. Fettweis für die Betreuung der vorliegenden Arbeit, seine ständige Diskussionsbereitschaft und für wertvolle Hinweise und Anregungen. Herrn Prof. Dr. J.F. Böhme danke ich für die Übernahme des Korreferats. Ferner möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Nachrichtentechnik für ihre Unterstützung bei der Vorbereitung des Manuskriptes recht herzlich bedanken.

Anhang

Die in dieser Arbeit vorgestellten Beweise greifen oftmals auf bekannte Ergebnisse und Theoreme aus der Literatur zurück. Um dem Leser diese Sätze leichter zugänglich zu machen, sind sie hier nochmals aufgeführt und mit genauen Quellenhinweisen versehen. Eine zentrale Stellung nehmen hierbei die Arbeiten über Hurwitzpolynome in mehreren Variablen und deren Verbindungen mit positiven Funktionen ein. Die Literaturzitate sind nach Themengebieten geordnet.

A 1 Hurwitzpolynome

A 1.1 Quelle: [7, Theorem 3.6]

Sei $g(\underline{p})$ ein Haupt-Hurwitzpolynom in k Variablen, dann gilt für das Polynom g' in m Variablen, $1 \leq m \leq k$, das durch Einfrieren von $(k-m)$ der Variablen p_i bei $p_i = p_{i0}$ in $\operatorname{Re} p_i > 0$ entsteht:

- i) g' ist ein Haupt-Hurwitzpolynom.
- ii) Die Teilgrade von g' sind gleich den entsprechenden Teilgraden von g .

A 1.2 Quelle: [12, Korollar 3.1]

Jeder Faktor eines Haupt-Hurwitzpolynoms ist ein Haupt-Hurwitzpolynom.

A 1.3 Quelle: [12, Korollar 3.2]

Jedes Produkt von Haupt-Hurwitzpolynomen ist ein Haupt-Hurwitzpolynom.

A 1.4 Quelle: [31, Definition 6]

Ein Polynom $g(\underline{p})$ heißt Hurwitzpolynom im strengen Sinne, falls

$$g(\underline{p}) \neq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} \underline{p} > \underline{0}.$$

A 1.5 Quelle: [12]

Ein Polynom $g(\underline{p})$ heißt Haupt-Hurwitzpolynom, falls

i) $g(\underline{p}) \neq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} \underline{p} > \underline{0},$

ii) g und g_* teilerfremd sind.

A 1.6 Quelle: [31, Theorem 7]

Ein Hurwitzpolynom im strengen Sinne ist auch ein Haupt-Hurwitzpolynom.

A 1.7 Quelle: [12, Theorem 3]

Jedes Haupt-Hurwitzpolynom $g(\underline{p})$, das von wenigstens einer der Variablen p_i abhängt, besitzt mindestens eine Nullstelle in $\operatorname{Re} \underline{p} < \underline{0}$.

A 1.8 Sei

$$a(p_1, p_2) = a_0(p_1) + a_1(p_1)p_2 + \dots + a_{n_2}(p_1)p_2^{n_2}$$

ein Reaktanz-Hurwitzpolynom [7, Definition 5.1], so braucht $a_{n_2}(p_1)$ kein eindimensionales Reaktanz-Hurwitzpolynom zu sein.

Beweis:

Man betrachte das zweidimensionale Reaktanznetzwerk in Bild A 1.1.

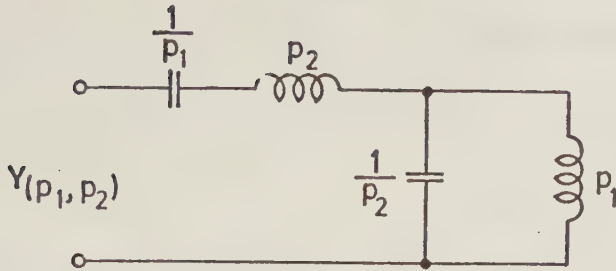


Bild A 1.1

Die Admittanz dieser Schaltung

$$Y(p_1, p_2) = \frac{p_1(1 + p_1 p_2)}{1 + p_1^2 + 2p_1 p_2 + p_1^2 p_2^2}$$

ist eine sogenannte zweidimensionale Reaktanzfunktion in irreduzibler Form. Gemäß [12, Theorem 7] und [7, Definition 5.1] ist das Nennerpolynom

$$a(p_1, p_2) = 1 + p_1^2 + 2p_1 p_2 + p_1^2 p_2^2$$

von $Y(p_1, p_2)$ ein Reaktanz-Hurwitzpolynom. Jedoch besitzt

$$a_2(p_1) = p_1^2$$

eine zweifache Nullstelle auf der $j\omega_1$ -Achse, wodurch $a_2(p_1)$ kein Reaktanz-Hurwitzpolynom ist, da $a_2(p_1)$ nicht das Nennerpolynom einer eindimensionalen Reaktanzfunktion in irreduzibler Form sein kann, da eine solche ausschließlich einfache Pole besitzt.

q.e.d.

A 2 Positive Funktionen

A 2.1 Quelle: [7, Theorem 7.1]

Die rationale Funktion

$$F(\underline{p}) = \frac{a(\underline{p})}{b(\underline{p})}$$

ist eine positive Funktion, falls sie folgenden Bedingungen genügt:

i) $b(\underline{p})$ ist ein Haupt-Hurwitzpolynom.

ii) $\deg_i a \leq \deg_i b \quad \forall \quad i \in I_k$

iii) Für alle Punkte $\underline{\omega}$, für die $F(j\underline{\omega})$ holomorph ist, gilt
 $\operatorname{Re} F(j\underline{\omega}) \geq 0$.

A 2.2 Quelle: [7, Definition 2.2]

Eine rationale Funktion $F(\underline{p})$ heißt positive Funktion, falls

$$\operatorname{Re} F(\underline{p}) \geq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} \underline{p} > \underline{0}.$$

A 2.3 Quelle: [7, Theorem 4.2]

Es seien a und b teilerfremde Polynome in $\underline{p}$, und $F = \frac{a}{b}$ sei eine positive Funktion, dann ist $(a+b)$ ein Haupt-Hurwitzpolynom.

A 2.4 Sei $a(\underline{p})$ ein Haupt-Hurwitzpolynom in k Variablen, mit

$$\deg_1 a = 1,$$

d.h., es läßt sich schreiben

$$a(\underline{p}) = a_0(\underline{p}') + a_1(\underline{p}') p_1.$$

Aufgrund von [61, Theorem 17] ist

$$a_1(\underline{p}') \neq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} \underline{p}' > \underline{0}.$$

Sei nun $(p_{10}, \underline{p}'_0)$ eine Nullstelle von $a(\underline{p})$, so gilt gemäß A 1.5

$$\operatorname{Re} p_{10} = - \operatorname{Re} \frac{a_0(\underline{p}'_0)}{a_1(\underline{p}'_0)} \leq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} \underline{p}'_0 > \underline{0},$$

d.h.

$$\operatorname{Re} \frac{a_0(\underline{p}')}{a_1(\underline{p}')} \geq 0 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} \underline{p}' > \underline{0}.$$

Die rationale Funktion $\frac{a_0}{a_1}$ ist somit eine positive Funktion.

A 3 Funktionentheorie

A 3.1 Quelle: [18, Hauptsatz, Version B]

Sei D' der Polyzylinder, welcher alle Punkte $\underline{p}$ enthält, für die $\operatorname{Re} \underline{p} > \underline{0}$ ist und C' die Menge aller $\underline{p}$, mit $\operatorname{Re} \underline{p} = \underline{0}$. Sei F eine rationale Funktion in $\underline{p}$, welche folgenden Bedingungen genügt:

- i) F ist holomorph für alle $\underline{p} \in D'$.
- ii) Für alle $\underline{p} \in C'$, für die F holomorph ist, gilt
$$|F(\underline{p})| \leq 1.$$

Es gilt dann

$$|F(\underline{p})| < 1 \quad \text{für alle} \quad \underline{p} \in D',$$

außer wenn F eine unimodulare Konstante ist.

A 3.2 Quelle: [18, Korollar 1]

Man betrachte die rationale Funktion $F = \frac{a}{b}$, wo a und b Polynome in $\underline{p}$ sind, die nicht notwendigerweise teilerfremd sein müssen.

Es gelte ferner:

i) $b(\underline{p}) \neq 0$ für $\operatorname{Re} \underline{p} > 0$.

ii) Für alle Punkte $\underline{p} = j\underline{\omega}$, für die $b(j\underline{\omega}) \neq 0$, gilt

$$|F(j\underline{\omega})| \leq 1.$$

In diesem Falle erhält man

$$|F(\underline{p})| < 1 \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} \underline{p} > 0,$$

außer wenn F eine unimodulare Konstante ist.

A 3.3 Es seien a und b Polynome in p .

Jeder gemeinsame Faktor c der Polynome $(a+b)$ und $(a-b)$ ist auch ein Faktor von a und b .

Beweis:

Da c ein Faktor von $(a+b)$ und $(a-b)$ ist, so ist c auch ein Faktor von

$$(a+b) + (a-b) = 2a$$

und von

$$(a+b) - (a-b) = 2b.$$

q.e.d.

A 4 Matrizen und Determinanten

A 4.1 Quelle: [25, Abschnitt 22.4]

Falls $\underline{M}_{11}$ und $\underline{M}_{22}$ quadratisch und außerdem $\underline{M}_{11}$ und

$$\underline{D} := (\underline{M}_{22} - \underline{M}_{21} \underline{M}_{11}^{-1} \underline{M}_{12})$$

regulär sind, so gilt

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_{11} & \underline{M}_{12} \\ \underline{M}_{21} & \underline{M}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{M}_{11}^{-1} + \underline{M}_{11}^{-1} \underline{M}_{12} \underline{D}^{-1} \underline{M}_{21} \underline{M}_{11}^{-1} & - \underline{M}_{11}^{-1} \underline{M}_{12} \underline{D}^{-1} \\ - \underline{D}^{-1} \underline{M}_{21} \underline{M}_{11}^{-1} & \underline{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Falls $\underline{M}_{11}$ und $\underline{M}_{22}$ quadratisch und außerdem $\underline{M}_{22}$ und

$$\underline{D} := (\underline{M}_{11} - \underline{M}_{12} \underline{M}_{22}^{-1} \underline{M}_{21})$$

regulär sind, so gilt

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_{11} & \underline{M}_{12} \\ \underline{M}_{21} & \underline{M}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{D}^{-1} & -\underline{D}^{-1} \underline{M}_{12} \underline{M}_{22}^{-1} \\ -\underline{M}_{22}^{-1} \underline{M}_{21} \underline{D}^{-1} & \underline{M}_{22}^{-1} + \underline{M}_{22}^{-1} \underline{M}_{21} \underline{D}^{-1} \underline{M}_{12} \underline{M}_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

A 4.2 Quelle: [16, Tabelle II, T 2.13]

$$\text{vec } (\underline{A} \underline{D} \underline{B}) = (\underline{B}^T \otimes \underline{A}) \text{vec } \underline{D}$$

A 4.3 Quelle: [16, Tabelle II, T 2.14]

Sei λ_i ein Eigenwert von $\underline{A}$ und μ_j ein Eigenwert von $\underline{B}$, dann ist $\lambda_i \mu_j$ ein Eigenwert von $\underline{A} \otimes \underline{B}$.

A 4.4 Sei $\underline{H}(p)$ eine rationale $(m \times m)$ -Matrix in p , mit dem Normalrang r , so ist es stets möglich, diese als Quotient aus einer Zählerpolynommatrix $\underline{N}(p)$ und dem Hauptnennerpolynom $d(p)$ aller Elemente von $\underline{H}(p)$ zu schreiben:

$$\underline{H}(p) = \frac{\underline{N}(p)}{d(p)}.$$

Mit Hilfe unimodularer Matrizen $\underline{U}_1(p)$, $\underline{U}_2(p)$ wird $\underline{N}(p)$ in ihre Smith-Form ([13, Theorem 6.3-16.]) gebracht

$$\underline{N}(p) = \underline{U}_1 \text{diag } (\lambda_1(p), \dots, \lambda_r(p), 0, \dots, 0) \underline{U}_2,$$

wo die Polynome $\lambda_1(p), \dots, \lambda_r(p)$ die Invariantenteiler von $\underline{N}(p)$ sind. Diese sind bis auf eine Konstante eindeutig und genügen folgender Teilbarkeitsbedingung:

$\lambda_i(p)$ ist ein Faktor von $\lambda_{i+1}(p)$, $i=1, \dots, r-1$.

Nun schreibt man

$$\underline{H}(p) = \underline{U}_1 \operatorname{diag} \left(\frac{\lambda_1}{d}, \dots, \frac{\lambda_r}{d}, 0, \dots, 0 \right) \underline{U}_2$$

und bringt die rationalen Funktionen $\frac{\lambda_i}{d}$ in eine irreduzible Form, d.h.

$$\frac{\lambda_i(p)}{d(p)} = \frac{\varepsilon_i(p)}{\psi_i(p)} \quad ,$$

wo $\varepsilon_i(p)$ und $\psi_i(p)$ teilerfremde Polynome sind.

Man erhält somit die Form

$$\underline{H}(p) = \underline{U}_1 \operatorname{diag} \left(\frac{\varepsilon_1}{\psi_1}, \dots, \frac{\varepsilon_r}{\psi_r}, 0, \dots, 0 \right) \underline{U}_2,$$

die manchmal auch als Smith-McMillan-Form von $\underline{H}(p)$ bezeichnet wird.

Der McMillan-Grad n_M [21] der rationalen Matrix $\underline{H}(p)$ ist nun definiert als

$$n_M := \deg \prod_{i=1}^r \psi_i(p).$$

Sei $\underline{H}(p)$ die Übertragungsmatrix eines reellen, linearen, zeitkontinuierlichen, konstanten Mehrgrößensystems, so ist die minimale Anzahl der Zustandsvariablen einer Realisierung von $\underline{H}(p)$ gleich dem McMillan-Grad n_M ([13, Abschnitt 6.52]). McMillan kam in seiner Arbeit [21] zum prinzipiell gleichen, aber restriktiveren Ergebnis, daß nämlich die minimale Anzahl reaktiver Bauelemente eines Reaktanzmehrtors gleich dem Grad n_M der zugehörigen Reaktanzmatrix ist.

Die oben gemachten Aussagen wurden aber stets für reelle Systeme hergeleitet, während in der vorliegenden Arbeit ebenso komplexe Netzwerke betrachtet werden, weshalb die Aus-

sagen bezügl. des Realisierungsaufwandes erneut überprüft werden müssen. In den Sätzen A 4.5 und A 4.6 wird gezeigt, daß das Konzept des McMillan-Grades auch auf komplexe Reaktanzmehrteile erweiterbar ist.

A 4.5 Der McMillan-Grad einer Matrix $\underline{A}(p)$ aus Ω_p ist gleich dem Grad des Nennerpolynoms von $\det \underline{A}$, falls diese Determinante in irreduzibler Form geschrieben wird. Entsprechendes gilt für Matrizen $\underline{S}(z)$ aus Ω_z .

Beweis:

Die $(m \times m)$ -Matrix $\underline{A}(p) = \frac{\underline{N}(p)}{\underline{d}(p)}$ werde zunächst, entsprechend A 4.4, in die Smith-McMillan-Form gebracht

$$\underline{A}(p) = \underline{U}_1 \operatorname{diag} \left(\frac{\epsilon_1}{\psi_1}, \dots, \frac{\epsilon_m}{\psi_m} \right) \underline{U}_2.$$

$\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ sind unimodulare Matrizen, und die Polynome ϵ_i und ψ_i sind jeweils teilerfremd, $i=1, \dots, m$. Der Normalrang von $\underline{A}$ ist aufgrund der Paraunitarität gleich der Ordnung m .

Außerdem gilt

$$\frac{\epsilon_i}{\psi_i} = \frac{\lambda_i}{d} \quad , \quad i=1, \dots, m,$$

wo $d(p)$ ein Haupt-Hurwitzpolynom ist (vergl. Satz 3.1) und die Polynome $\lambda_1(p), \dots, \lambda_m(p)$ die Invariantenteiler der Matrix $\underline{N}(p)$ sind. Als solche genügen sie der Bedingung

$$\lambda_i(p) \text{ ist ein Faktor von } \lambda_{i+1}(p), \quad i=1, \dots, m-1,$$

und somit gilt für die Polynome ψ_i

$$\psi_{i+1}(p) \text{ ist ein Faktor von } \psi_i(p), \quad i=1, \dots, m-1.$$

Da die Invariantenteiler einer Matrix bis auf einen konstanten Faktor eindeutig sind, so gilt dies entsprechend auch

für die Größen $\frac{\varepsilon_i}{\psi_i}$.

Die Matrix $\underline{A}(p)$ ist gemäß der Voraussetzung paraunitär, d.h.

$$\underline{A}_* = \underline{A}^{-1}.$$

Wendet man diese Eigenschaft auf die Smith-McMillan-Form von $\underline{A}$ an, so erhält man

$$\underline{A}_* = \underline{U}_{2*} \operatorname{diag} \left(\frac{\varepsilon_{1*}}{\psi_{1*}}, \dots, \frac{\varepsilon_{m*}}{\psi_{m*}} \right) \underline{U}_{1*} =$$

$$\underline{A}^{-1} = \underline{U}_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \left[\frac{\psi_m}{\varepsilon_m}, \dots, \frac{\psi_1}{\varepsilon_1} \right] \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} \underline{U}_1^{-1}.$$

Der linke Ausdruck in obiger Gleichung ist offensichtlich die Smith-McMillan-Form der Matrix $\underline{A}_*$, aber ebenso gilt diese Aussage auch für die rechte Seite der Gleichung, denn

$\underline{U}_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} \underline{U}_1^{-1}$ sind unimodulare Matrizen, und es gilt

ψ_{i+1} ist ein Faktor von ψ_i , $i=1, \dots, m-1$.

Die Diagonalmatrix der Smith-McMillan-Form ist aber bis auf einen konstanten Diagonalmatrixfaktor eindeutig, d.h.

$$\frac{\varepsilon_{1*}}{\psi_{1*}} = \alpha \frac{\psi_m}{\varepsilon_m},$$

wo $\alpha = \text{const.}$

Da die Ausdrücke auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens irreduzibel sind, so folgt

$$\psi_{1*} = \beta \epsilon_m,$$

wo $\beta = \text{const.}$ Des weiteren ist das Hauptnennerpolynom $d(p)$ der Matrix A ein Haupt-Hurwitzpolynom, wodurch sein Faktor ψ_1 ebenfalls zu dieser Polynomklasse gehört (vergl. A 1.2) und aufgrund obiger Beziehung auch ϵ_{m*} . Wegen der bereits erwähnten Teilbarkeitsbeziehungen zwischen den Polynomen $\psi_1, \dots, \psi_m$ bzw. $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ und wegen der Sätze A 1.2, A 1.3 sind somit die Ausdrücke

$$\prod_{i=1}^m \psi_i$$

und

$$\prod_{i=1}^m \epsilon_{i*}$$

Haupt-Hurwitzpolynome. Mit Hilfe der Smith-McMillan-Form der Matrix A findet man

$$\det \underline{A} = \gamma \frac{\prod_{i=1}^m \epsilon_i}{\prod_{i=1}^m \psi_i},$$

wo $\gamma = \text{const.}$ Da Zähler- und Nennerpolynom der rechten Seite keine gemeinsame Nullstelle besitzen können, so ist dieser Ausdruck irreduzibel. Der Grad seines Nennerpolynoms entspricht aber der Definition des McMillan-Grades (vergl. A 4.4) von A(p).

q.e.d.

A 4.6 Sei $\underline{A}(p)$ die (mxm) -Streumatrix eines eindimensionalen Reaktanzmehrtors N , dann ist die Anzahl reaktiver Bauelemente in dieser Schaltung größer oder gleich dem McMillan-Grad von $\underline{A}$.

Beweis:

Es ist stets möglich, alle reaktiven Bauelemente von N mit Hilfe von Gyrotoren und idealen Übertragern in Kapazitäten mit der Admittanz p zu transformieren. Zieht man diese anschließend aus dem Netzwerk N heraus und trennt sie ab, so erhält man ein konstantes Koppelnetzwerk N' , das durch eine unitäre Streumatrix $\underline{A}'$ beschrieben wird. Die Anzahl der herausgezogenen Kapazitäten sei r , wodurch man $\underline{A}'$ wie folgt in Blöcke aufteilen kann:

$$\underline{A}' = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ r \\ m \\ r \end{matrix} .$$

Aufgrund ähnlicher Überlegungen wie in Abschnitt 4.2 muß gelten

$$\underline{A}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}(z \underline{1}_r - \underline{A}_{22})^{-1} \underline{A}_{21},$$

außerdem wurde gezeigt, daß

$$\det \underline{A}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\text{Polynom in } z}{\det(z \underline{1}_r - \underline{A}_{22})} .$$

Gemäß [12] ist $\underline{A}(p)$ ein Element aus Ω_p , wodurch laut Satz 3.1

$$\det \underline{A}(p) = -\sigma \frac{a_*(p)}{a(p)} ,$$

wo σ ein unimodulare Konstante und $a(p)$ ein Haupt-Hurwitz-polynom vom Grad n ist, d.h.

$$\det \underline{A}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = -\sigma \frac{\underline{g}(z) z^n}{\underline{g}(z)},$$

mit

$$\underline{g}(z) = a\left(\frac{z-1}{z+1}\right) (z+1)^n.$$

Da $\underline{g}(z)$ das zu $a(p)$ gehörige AHHP ist, so folgt aus Satz 3.2

$$\deg \underline{g} = \deg a = n,$$

und $\underline{g}(z)$ ist teilerfremd mit $\underline{g}(z) z^n$.

Setzt man den neu gewonnenen Ausdruck für die Determinante von $\underline{A}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ mit dem bereits vorher gefundenen Ergebnis gleich, so erhält man

$$\det \underline{A}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = -\sigma \frac{\underline{g}(z) z^n}{\underline{g}(z)} = \frac{\text{Polynom in } z}{\det(z \underline{1}_r - \underline{A}_{22})}.$$

Da der Ausdruck

$$\frac{\underline{g}(z) z^n}{\underline{g}(z)}$$

irreduzibel ist und

$$\det(z \underline{1}_r - \underline{A}_{22})$$

ein Polynom in z vom Grade r ist, so folgt

$$r \geq n,$$

d.h.

$$r \geq \deg a(p).$$

Berücksichtigt man noch A 4.5, so wird die Richtigkeit der Behauptung offensichtlich.

q.e.d.

A 4.7 Quelle: [25, Kapitel 20.3]

Die Neumannsche Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \underline{A}^i$$

konvergiert gegen

$$(\underline{1} - \underline{A})^{-1},$$

falls die Beträge aller Eigenwerte der Matrix A kleiner als eins sind.

A 4.8 Quelle: [25, Kapitel 22.4]

Es seien $\underline{A}_{11}$ und $\underline{A}_{22}$ quadratische Matrizen. Falls $\underline{A}_{22}$ regulär ist, dann gilt

$$\det \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \det \underline{A}_{22} \det(\underline{A}_{11} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{22}^{-1} \underline{A}_{21}).$$

Falls $\underline{A}_{11}$ regulär ist, dann gilt

$$\det \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} = \det \underline{A}_{11} \det(\underline{A}_{22} - \underline{A}_{21} \underline{A}_{11}^{-1} \underline{A}_{12}).$$

A 4.9 Quelle: [23, Kapitel 1.3]

Falls die Matrix M regulär ist, so gilt

$$\det \underline{M}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{M}}.$$

A 4.10 Falls $\underline{M}_1$ und $\underline{M}_2$ quadratisch sind, so gilt

$$\det \begin{bmatrix} \underline{M}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}_2 \end{bmatrix} = \det \underline{M}_1 \det \underline{M}_2.$$

Beweis:

Siehe A 4.8.

A 4.11 Quelle: [13, Abschnitt A 12]

Es sei $\underline{A}$ eine $(n \times m)$ -Matrix, und $\underline{B}$ sei eine $(m \times n)$ -Matrix, dann gilt

$$\det(\underline{1}_n - \underline{A} \underline{B}) = \det(\underline{1}_m - \underline{B} \underline{A}).$$

A 4.12 Quelle: [13, Abschnitt A 21]

Falls die Matrizen $\underline{A}$, $\underline{B}$ und $\underline{A+B}$ regulär und quadratisch sind, dann gilt

$$(\underline{A} + \underline{B})^{-1} = \underline{A}^{-1} - \underline{A}^{-1}(\underline{A}^{-1} + \underline{B}^{-1})^{-1} \underline{A}^{-1}.$$

A 4.13 Definition:

Das Kronecker-Produkt einer $(p \times q)$ -Matrix $\underline{A}$ mit einer $(m \times n)$ -Matrix $\underline{B}$ wird mit

$$\underline{A} \otimes \underline{B}$$

bezeichnet und ist durch folgende $(pm \times qn)$ -Matrix definiert.

$$\underline{A} \otimes \underline{B} := \begin{bmatrix} a_{11}\underline{B} & a_{12}\underline{B} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1q}\underline{B} \\ a_{21}\underline{B} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{p1}\underline{B} & \cdot & \cdot & \cdot & & a_{pq}\underline{B} \end{bmatrix},$$

mit

$$\underline{A} = (a_{ij})_{p,q}.$$

A 4.14 Seien A und B quadratische Matrizen der Ordnung m, dann konvergiert die unendliche Reihe

$$\underline{C} = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{A}^n \underline{B} \underline{A}^{*n},$$

falls alle Eigenwerte von A betragsmäßig kleiner als eins sind.

Beweis:

Durch eine Ähnlichkeitstransformation mit einer regulären Matrix T läßt sich A auf die Jordansche Normalform [25, § 19.1]

$$\underline{J} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} = \text{diag}(\underline{J}_1, \dots, \underline{J}_s)$$

überführen, wo

$$\underline{J}_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad k=1, \dots, s,$$

ein $m_k \times m_k$, $1 \leq m_k \leq m$, Jordan-Block ist und λ_k einen Eigenwert von A symbolisiert. Falls $m_k=1$, so gelte

$$\underline{J}_k = [\lambda_k].$$

Somit erhält man

$$\underline{A}^n = (\underline{T} \underline{J} \underline{T}^{-1})^n = \underline{T} \underline{J}^n \underline{T}^{-1} = \underline{T} \text{diag}(\underline{J}_1^n, \dots, \underline{J}_s^n) \underline{T}^{-1},$$

d.h.

$$\underline{C} = \underline{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \underline{J}^n \underline{T}^{-1} \underline{B} \underline{T}^{*1} \underline{J}^{*n} \right) \underline{T}^*.$$

Gemäß [60, Theorem 4-1-1] erhält man für die n-te Potenz von $\underline{J}_k$

$$\underline{J}_k^n = \begin{bmatrix} \lambda_k^n & \binom{n}{1} \lambda_k^{n-1} & \binom{n}{2} \lambda_k^{n-2} & \dots \\ 0 & \lambda_k^n & \binom{n}{1} \lambda_k^{n-1} & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_k^n & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & & \lambda_k^n \end{bmatrix}, k=1, \dots, s.$$

Sei λ der betragsmäßig größte Eigenwert von $\underline{A}$ und u_{qr} das Element der q -ten Zeile und r -ten Spalte von $\underline{J}^n$, so gilt aufgrund obiger Struktur von $\underline{J}_k^n$

$$|u_{qr}| < m! \frac{n!}{|n-m+1|!} |\lambda|^{n-m+1},$$

da $0 < |\lambda| < 1$.

Gemäß [23, Kapitel 14.2] gilt für jede Matrixnorm

$$\|\underline{J}^n\| \leq m^2 \max_{q,r} |u_{qr}| < m^2 m! \frac{n!}{|n-m+1|!} |\lambda|^{n-m+1}.$$

Mit [23, Kapitel 14.2, (19) und (19'')] erhält man für jedes Element c_{qr} , $1 \leq q, r \leq m$, der Matrix $\underline{C}$

$$\begin{aligned} |c_{qr}| &\leq \|\underline{C}\| \leq \left\| \underline{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \underline{J}^n \underline{T}^{-1} \underline{B} \underline{T}^{-1*} \underline{J}^{*n} \right) \underline{T}^* \right\| \\ &\leq \|\underline{T}\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|\underline{J}^n\|^2 \|\underline{T}^{-1} \underline{B} \underline{T}^{-1*}\| \\ &\leq \|\underline{T}\|^2 \|\underline{T}^{-1} \underline{B} \underline{T}^{-1*}\| \sum_{n=0}^{\infty} (m^2 m! \frac{n!}{|n-m+1|!} |\lambda|^{n-m+1})^2. \end{aligned}$$

Der Term der rechten Seite in obiger Ungleichung ist konvergent, falls

$$\sum_{n=m-1}^{\infty} \left(\frac{n!}{|n-m+1|!} |\lambda|^{n-m+1} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+m-1)!}{n!} |\lambda|^n \right)^2$$

konvergiert.

Es gilt aber

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+m-1)!}{n!} |\lambda|^n \right)^2 &< \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m-1)!}{n!} |\lambda|^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m-1)!}{k!} |\lambda|^k \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m-1)!}{n!} |\lambda|^n \right)^2. \end{aligned}$$

Gemäß [62, S.10 Formel (33)] konvergiert die rechte Seite für $|\lambda| < 1$ gegen

$$\left(\frac{(m-1)!}{(1-|\lambda|)^m} \right)^2.$$

q.e.d.

A 4.15 Jede rationale diskret parahermitesche $(m \times m)$ -Matrix A läßt sich mit Hilfe einer regulären rationalen Matrix T wie folgt in eine rationale Diagonalmatrix D überführen

$$\underline{T} \underline{A} \underline{T} = \underline{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_m),$$

wobei

$$\underline{A} = \underline{\tilde{A}} \quad , \quad \underline{D} = \underline{\tilde{D}}.$$

Beweis:

Gemäß [23, Kapitel 2.4] läßt sich jede quadratische Matrix A als

$$\underline{A} = \underline{P} \underline{F} \underline{D} \underline{L} \underline{P}^T$$

schreiben, wo P eine Permutationsmatrix, F eine untere reguläre Dreiecksmatrix, L eine obere reguläre Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix ist. Die Elemente von F, D und L können jeweils explizit als Quotient zweier Minoren

von $\underline{A}$ ausgedrückt werden, d.h., alle Elemente sind rationale Funktionen, falls $\underline{A}$ rational ist. Aus [23, Kapitel 2.4, Formel (45)] erkennt man sofort

$$\underline{E} = \underline{L},$$

falls

$$\underline{\hat{A}} = \underline{A},$$

d.h. im vorliegenden Falle

$$\underline{A} = \underline{E} \underline{F} \underline{D} \underline{E} \underline{P}$$

oder

$$\underline{T} \underline{A} \underline{T} = \underline{D},$$

mit

$$\underline{T} = (\underline{P} \underline{E})^{-1}.$$

q.e.d.

A.5 Synthese eindimensionaler Reaktanzmehrtores

Sei $\underline{S}(z)$ ein Element aus Ω_z , mit

$$\det \underline{S}(z) = -\sigma \frac{g(z) z^n}{g(z)},$$

wo σ eine unimodulare Konstante und $g(z)$ ein AHHP vom Grade n ist.

In der Arbeit [24] wurde ein Verfahren vorgestellt, mit dem es stets möglich ist, eine konstante Matrix $\underline{S}'$ aus Ω_z zu finden, die als Streumatrix eines konstanten Mehrtors aufgefaßt werden kann, das nach Abschluß der letzten n Tore mit z^{-1} -Reflektanzen ein eindimensionales Mehrtor ergibt, dessen Streumatrix identisch mit $\underline{S}(z)$ ist. Das Problem ist somit auf die Synthese der konstanten Matrix $\underline{S}'$ reduziert. Die aus der Literatur bekannten Syntheseverfahren (z.B. [29, Kapitel 7]) behandeln lediglich reelle Netzwerke, weshalb hier kurz der Fall einer i.a. komplexen Matrix $\underline{S}'$ aus Ω_z

behandelt werden soll.

Das folgende Syntheseverfahren basiert auf einer Faktorisierung der unitären Matrix $\underline{S}'$. Hierbei wird von folgenden Eigenschaften Gebrauch gemacht:

- i) Das Produkt zweier unitärer Matrizen ergibt eine unitäre Matrix.
- ii) Mindestens ein Element einer jeden Spalte einer unitären Matrix ist ungleich null.
- iii) Die Inverse einer unitären Matrix ist unitär.
- iv) Die Matrix

$$\underline{U}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+|f_i|^2}} \begin{bmatrix} 1 & f_i^* \\ f_i & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

ist unitär, wobei $f_i \in \mathbb{C}$.

- v) Die Permutationsmatrix

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & 0 \\ . & 0 & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ \\ i \\ \\ \end{matrix}$$

1 i

ist reell und orthogonal und vertauscht als linksseitiger Multiplikator die 1-te Zeile der nachfolgenden Matrix mit deren i-ter.

Im folgenden wird die Notation

$$\underline{S}'_i = \begin{bmatrix} s_{11}^{(i)} & . & . & . & s_{1m}^{(i)} \\ s_{21}^{(i)} & & & & \\ \vdots & & & & \\ s_{m1}^{(i)} & . & . & . & s_{mm}^{(i)} \end{bmatrix}$$

benutzt.

Gegeben sei eine unitäre (mxm)-Matrix $\underline{S}'_0$. Durch linksseitige Multiplikation von $\underline{S}'_0$ mit einer orthogonalen Matrix $\underline{V}_0$ werden zwei von null verschiedene Elemente der ersten Spalte in die linke obere Ecke gebracht, falls nicht bereits (m-1) Elemente der ersten Spalte null sind:

$$\underline{S}'_1 = \underline{V}_0 \underline{S}'_0 .$$

Anschließend multipliziert man $\underline{S}'_1$ linksseitig mit der oben definierten Matrix $\underline{U}_1$:

$$\underline{S}'_2 = \underline{U}_1 \underline{S}'_1 ,$$

wobei

$$s_{21}^{(2)} = f_1 s_{11}^{(1)} - s_{21}^{(1)} = 0$$

gewählt wird, d.h.

$$f_1 = \frac{s_{21}^{(1)}}{s_{11}^{(1)}} .$$

$s_{11}^{(1)}$ ist laut Voraussetzung ungleich null.

Die letzten (m-2) Zeilen der Matrix $\underline{S}'_1$ bleiben bei dieser Operation unverändert!

Nun wiederholt man das Verfahren. Durch Vertauschen der zweiten Zeile von $\underline{S}'_2$ mit einer der (m-2) letzten Zeilen bringt man erneut ein

von null verschiedenes Element in die Position (2,1). Anschließend multipliziert man wiederum mit einer Matrix $\underline{U}_2$, usw. Das Verfahren bricht ab, wenn alle ersten Elemente der (m-1) letzten Zeilen gleich null sind. Nun betrachtet man die ((m-1)x(m-1))-Matrix der rechten unteren Ecke und wendet das gleiche Verfahren auch auf diese Matrix an, usw. Nach endlich vielen Schritten erhält man eine obere Dreiecksmatrix. Da diese das Produkt aus unitären Matrizen ist, ist sie selbst unitär. Eine unitäre Dreiecksmatrix ist aber zugleich eine Diagonalmatrix, d.h., man erhält folgende Faktorisierung von $\underline{S}'_0$:

$$\underline{S}'_0 = \underline{V}_0^{-1} \underline{U}_1^{-1} \underline{V}_1^{-1} \underline{U}_2^{-1} \dots \underline{V}_1^{-1} \underline{U}_{1+1}^{-1} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m),$$

mit

$$|\sigma_i| = 1, \quad i=1, \dots, m.$$

Die Faktoren von $\underline{S}'_0$ können nun einzeln realisiert und die entstehenden Teilnetzwerke über Zirkulatoren zu einem Gesamtnetzwerk zusammengeschaltet werden, dessen Streumatrix $\underline{S}'$ ist [30]. Die Synthese von $\underline{V}_i^{-1}$ ist bekannt, da sie reell und orthogonal ist. Somit reduziert sich das Problem auf die Realisierung von $\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ und

$$\underline{U}_i^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+|f_i|^2}} & \begin{bmatrix} 1 & f_i^* \\ f_i & -1 \end{bmatrix} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix}.$$

Sei

$$f_i = |f_i| e^{j\varphi_i},$$

dann gilt

$$\underline{U}^{-1} = \text{diag}(1, e^{j\varphi_{i,1}}, \dots, 1) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+|f_{i,1}|^2}} & \begin{bmatrix} 1 & |f_{i,1}| \\ |f_{i,1}| & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \text{diag}(1, e^{-j\varphi_{i,1}}, \dots, 1).$$

Die Matrix

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+|f_{i,1}|^2}} & \begin{bmatrix} 1 & |f_{i,1}| \\ |f_{i,1}| & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

ist reell und orthogonal und kann daher mit bekannten Verfahren realisiert werden. Somit reduziert sich das Problem auf die Synthese unitärer Diagonalmatrizen.

Sei

$$\underline{D} = \text{diag} (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$$

eine unitäre Diagonalmatrix, d.h.

$$|\sigma_i|^2 = 1, \quad i=1, \dots, m,$$

dann ist die Streumatrix des in Bild A 5.1 dargestellten Reaktanznetzwerks N offensichtlich gleich $\underline{D}$.

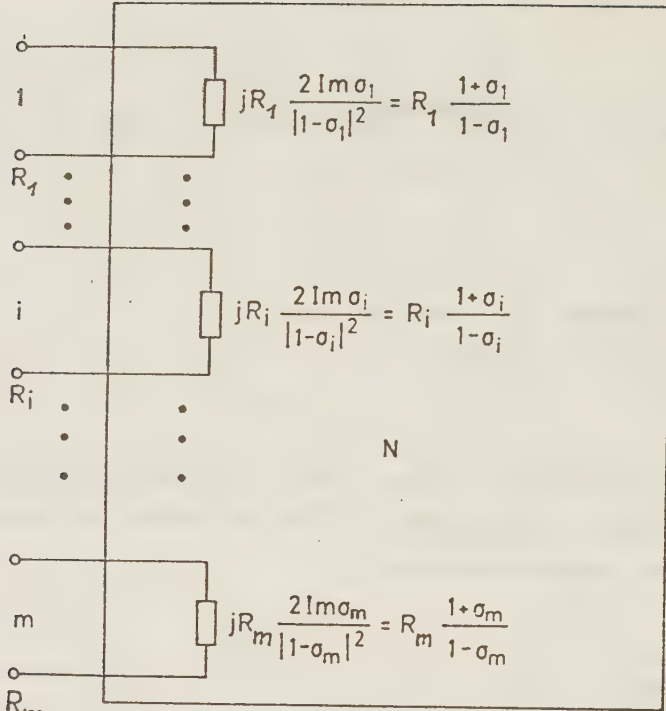


Bild A 5.1

R_1 bis R_m sind die Torwiderstände von N . Falls $\sigma_i = 1$, so erhält man Leerlauf an Tor i .

Mit der oben geschilderten Synthese der unitären Matrix $\underline{S}'_0$ erhält man ein konstantes, verlustfreies m -Tor, das nach Abschluß der letzten n Tore mit z^{-1} -Reflektanzen eine Schaltung ergibt, deren Streumatrix identisch ist mit $\underline{S}(z)$. Die entwickelte Schaltung enthält exakt n frequenzabhängige Bauelemente.

Berücksichtigt man noch A 4.5, A 4.6 und Satz 3.3, so erkennt man, daß das realisierte Netzwerk die kleinstmögliche Anzahl reaktiver Elemente enthält.

A 6 Faktorisierung rationaler, parahermitescher Matrizen

Problemstellung

Gegeben sei eine $(m \times m)$ -Matrix $\underline{H}(p)$, die folgende Eigenschaften besitzt:

- i) $\underline{H}(p)$ ist rational in p ,
- ii) $\underline{H}(p)$ ist parahermitesch, d.h.

$$\underline{H} = \underline{H}_\star,$$

- iii) $\underline{H}(j\omega)$ ist nichtnegativ definit hermitesch für alle $\omega \in \mathbb{R}$, für die $\underline{H}(j\omega)$ holomorph ist.

Die Aufgabe besteht nun darin, eine Matrix $\underline{C}$ zu bestimmen, die folgende Bedingungen erfüllt:

- i) $\underline{C} = \underline{C}(p)$ ist rational in p ,
- ii) $\underline{C}_\star \underline{C} = \underline{H}$,
- iii) $\underline{C}$ ist holomorph für $\operatorname{Re} p > 0$,
- iv) $\underline{C}$ kann geschrieben werden als

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{F} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} \underline{U},$$

$r \quad m-r$

wo $\underline{U}$ eine unimodulare Matrix und $\underline{F}^{-1}$ regulär und holomorph für $\operatorname{Re} p > 0$ ist, mit

$$r = \operatorname{rank} \underline{C}.$$

Die Lösung dieses Problems besitzt große Bedeutung bei der Netzwerksynthese, im Bereich der Filtertheorie und in der Regelungstechnik. Deshalb ist die Vielzahl der Veröffentlichungen zu diesem Thema nicht verwunderlich [51 - 56, 35, 58]. Mit Ausnahme von Davis [55]

benutzen alle Autoren in jedem Teilschritt der Faktorisierung gebrochen rationale Matrizen, wodurch die vorgestellten Verfahren sehr aufwendig werden. Lediglich Davis versuchte, das Problem über die Faktorisierung einer Polynommatrix zu lösen. Die Gedankengänge wurden jedoch lediglich an einem Beispiel illustriert, und es wurde auf eine strenge mathematische Beweisführung verzichtet. Deshalb wird nachfolgend ein Verfahren vorgestellt, das ebenfalls die Faktorisierung einer Polynommatrix als Ausgangspunkt benutzt und die Allgemeingültigkeit der gemachten Aussagen belegt. Der Vorteil gegenüber anderen Methoden liegt in der Einfachheit der Beweisführung und dem effizienten Algorithmus für eine praktische Durchführung der Faktorisierung. Dieses bislang unveröffentlichte Verfahren wurde von Herrn Fettweis vorgeschlagen und soll mit seinem Einverständnis hier vorgestellt werden, da eine praktikable Lösung des Problems enorme Bedeutung bei der Synthese zweidimensionaler Reaktanzmehrtore besitzt (vergl. Kapitel 4.3). Im Abschnitt 4.3 wird nämlich die Faktorisierung

$$\underline{H}'(z) = \underline{C}'(z) \underline{C}(z)$$

einer in z rationalen, diskret parahermiteschen Matrix $\underline{H}'(z)$ benötigt, die außerdem nichtnegativ definit hermitesch für alle Punkte z auf dem Einheitskreis ist. Aufgrund der Transformation (3.4) und den Ausführungen im Kapitel 4 ist die Äquivalenz dieses Problems zu der oben im p -Bereich formulierten Aufgabenstellung evident und soll deshalb nicht näher erläutert werden. Ebenso können die Lösungen des einen Problems über die Transformation (3.4) aus den Lösungen des anderen Problems gewonnen werden.

Beispiel:

Gegeben sei $\underline{H}'(z)$ mit den oben genannten Eigenschaften.

i) Man berechne

$$\underline{H}(p) = \underline{H}'\left(\frac{1+p}{1-p}\right).$$

ii) Mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens gewinnt man

$$\underline{C}(p).$$

iii) Damit erhält man

$$\underline{C}'(z) = \underline{C}\left(\frac{z-1}{z+1}\right),$$

mit

$$\underline{C}'(z) \underline{C}'(z) = \underline{H}'(z)$$

$$\underline{C}_*(p) \underline{C}(p) = \underline{H}(p).$$

Zur Vorbereitung des eigentlichen Faktorisierungsverfahrens ist zunächst ein Hilfssatz erforderlich.

Lemma A 6.1:

Man schreibe

$$\underline{H} = \frac{1}{d} \underline{A},$$

wo d der kleinste gemeinsame Nenner aller Elemente von $\underline{H}$ ist. Durch Erweitern dieses Quotienten mit einer geeigneten Konstanten kann stets gewährleistet werden, daß

$$d = c_* c,$$

$$\underline{A} = \underline{A}_*,$$

$$\underline{A}(\underline{j}\underline{\omega}) \geq 0,$$

wo c ein Polynom in p und $\underline{A}$ eine Polynommatrix in p ist.

Beweis:

Sei p_0 ein Pol von $\underline{H}$, dann ist $-p_0^*$ ebenfalls ein Pol von $\underline{H}$, da

$$\underline{H} = \underline{H}^*.$$

Falls $\operatorname{Re} p_0 \neq 0$, so treten also die Pole von $\underline{H}$ paarweise auf, d.h., d muß einen Faktor

$$(p_0 - p)(p_0^* + p)$$

besitzen. Falls $p_0 = j\omega_0$, dann gilt folgendes:

- i) Sei $j\omega_0$ ein Pol eines der Diagonalelemente H_{ii} von $\underline{H}$, so muß es ein Pol mit gerader Ordnung sein, da

$$H_{ii}(j\omega) \geq 0 \quad \forall \quad \omega,$$

d.h., der kleinste gemeinsame Nenner aller Diagonalelemente enthält den Faktor

$$(j\omega_0 - p)^{m_0},$$

wobei m_0 gerade ist.

- ii) Für jedes andere Element H_{ik} , $i \neq k$, gilt aufgrund der geforderten Definitheit der Matrix $\underline{H}(j\omega)$

$$H_{ii}(j\omega) H_{kk}(j\omega) - H_{ik}(j\omega) H_{ki}(j\omega) \geq 0,$$

d.h.

$$H_{ii}(j\omega) H_{kk}(j\omega) \geq |H_{ik}(j\omega)|^2,$$

da

$$H_{ki} = H_{ik}^*.$$

Somit gilt für einen Pol $j\omega_0$ der Vielfachheit m_{ik} des

Elements H_{ik}

$$m_{ii} + m_{kk} \geq 2m_{ik},$$

d.h.

$$m_{ik} \leq \max_i (m_{ii}) \leq m_0.$$

Deshalb besitzt $(j\omega_0 - p)^{m_0} \underline{H}(p)$ keinen Pol bei $j\omega_0$, und $(j\omega_0 - p)^{m_0}$ ist ein Faktor von d .

Das Hauptnennerpolynom d der Matrix $\underline{H}$ kann demgemäß, nach Einfügen eines geeignet gewählten konstanten Faktors, in ein Produkt $d = c \cdot c_*$ zerlegt werden. Somit erhält man außerdem:

$$i) \quad \underline{H} = \frac{\underline{A}}{d} = \frac{\underline{A}}{c_* c} = \underline{H}_* = \frac{\underline{A}_*}{c c_*},$$

$$\rightarrow \underline{A} = \underline{A}_*,$$

$$ii) \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{A}(j\omega)}{|c(j\omega)|^2} \geq 0,$$

$$\rightarrow \underline{A}(j\omega) \geq 0.$$

q.e.d.

Die gestellte Aufgabe reduziert sich nun auf die Faktorisierung der Matrix $\underline{A}$ in der Form

$$\underline{A} = \underline{B}_* \underline{B},$$

wo $\underline{B}$ eine Polynommatrix ist. Das vorgeschlagene Verfahren gliedert sich in aufeinanderfolgende Teilschritte.

Sei $\underline{A}$ eine Polynommatrix der Ordnung m und zunächst regulär, außerdem gelte

$$\underline{A} = \underline{A}_*,$$

$$\underline{A}(j\omega) \geq 0,$$

$$\deg(\det \underline{A}) = n > 0.$$

Sei p_0 eine Nullstelle von $\det \underline{A}$, dann existiert ein konstanter, von null verschiedener Vektor $\underline{\gamma}$, der eine Lösung der Gleichung

$$\underline{A}(p_0) \underline{\gamma} = \underline{0}$$

ist, d.h.

$$\underline{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_i \\ \gamma_{i+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix},$$

mit

$$\gamma_i \neq 0,$$

$$1 \leq i \leq m.$$

Man definiere nun die Matrix

$$\underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \gamma_i & \\ & & & \vdots & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \gamma_m \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad i, \quad \det \underline{\Gamma} = \gamma_i \neq 0$$

und betrachte die Gleichung

$$\underline{R} := \underline{A} \underline{\Gamma}.$$

Alle Elemente der i-ten Spalte der Polynommatrix $\underline{R}$ besitzen eine Nullstelle bei p_0 .

Nun untersuche man die Matrix

$$\underline{G} := \underline{\Gamma}^* \underline{R} = \underline{\Gamma}^* \underline{A} \underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \dots & g_{mm} \end{bmatrix}.$$

Diese ist offensichtlich parahermitesch und nichtnegativ definit für $p = j\omega$. Des weiteren gilt

$$g_{ki}(p_0) = 0 \quad \text{für} \quad k=1, \dots, m$$

und

$$g_{ik}(-p_0^*) = 0 \quad \text{für} \quad k=1, \dots, m,$$

da

$$g_{ik} = g_{ki}^*.$$

Falls $\operatorname{Re} p_0 \neq 0$, so besitzt demgemäß das Element g_{ii} einen Faktor

$(p_0 - p)(p_0^* + p)$, und falls $p_0 = j\omega_0$, so ist g_{ii} durch $(j\omega_0 - p)^2$ teilbar, da

$$g_{ii}(j\omega) \geq 0.$$

Nun definiere man

$$\underline{\Delta} := \text{diag}(1, \dots, 1, \underset{i}{(p_0 - p)}, 1, \dots, 1),$$

d.h.

$$\underline{\Delta}^{-1} = \text{diag}(1, \dots, 1, \frac{1}{p_0 - p}, 1, \dots, 1).$$

Aufgrund der oben genannten Eigenschaften von $\underline{G}$ ist

$$\underline{M} := \underline{\Delta}_*^{-1} \underline{G} \underline{\Delta}^{-1}$$

eine Polynommatrix, mit

$$\underline{M} = \underline{M}_*,$$

$$\underline{M}(j\omega) \geq 0,$$

d.h.

$$\underline{A} = (\underline{\Gamma}^*)^{-1} \underline{\Delta}_* \underline{M} \underline{\Delta} \underline{\Gamma}^{-1},$$

mit

$$\deg \det \underline{A} = n = 2 + \deg \det \underline{M}.$$

Falls nun

$$\deg \det \underline{M} > 0,$$

so läßt sich das eben geschilderte Verfahren erneut auf $\underline{M}$ anwenden, bis schließlich, nach endlich vielen Schritten, die Determinante der resultierenden Matrix den Grad null besitzt. Insgesamt existiert also eine Polynommatrix $\underline{P}$, so daß

$$\underline{A} = \underline{P}_* \underline{W} \underline{P},$$

mit

$$\det \underline{W} = \text{const.} \neq 0,$$

$$\underline{W}_* = \underline{W},$$

$$\underline{W}(j\omega) \geq 0.$$

Da die jeweilige Nullstelle, die in einem Schritt eliminiert werden soll, beliebig aus der Menge aller Nullstellen von $\det \underline{A}$ gewählt werden kann, so ist es stets möglich, die Zuordnung so vorzunehmen, daß

$$\det \underline{P} \neq 0 \text{ für } \text{Re } p > 0.$$

Das Problem reduziert sich auf die Faktorisierung der neu gewonnenen unimodularen Matrix $\underline{W}$. Diese Aufgabe wurde bereits von Oono und Yasura gelöst, trotzdem soll hier ein alternatives Verfahren vorgestellt werden, da die Beweisführung einfacher ist.

Lemma A 6.2:

Sei $\underline{W}$ eine $(m \times m)$ -Polynommatrix, mit

$$\underline{W}_* = \underline{W},$$

$$\underline{W}(j\omega) \geq 0,$$

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{1m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ w_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{mm} \end{bmatrix},$$

dann gilt

$$\deg w_{ik} \leq \frac{1}{2} (\deg w_{ii} + \deg w_{kk}).$$

Beweis:

Für $p = j\omega$ gilt aufgrund von $\underline{W}(j\omega) \geq 0$:

$$i) \quad w_{ii}(j\omega) \geq 0$$

$$ii) \quad w_{kk}(j\omega) \geq 0$$

$$iii) \quad w_{ii}(j\omega) w_{kk}(j\omega) \geq |w_{ik}(j\omega)|^2.$$

Aus iii) folgt unmittelbar die Behauptung.

q.e.d.

Im weiteren werden elementare, parahermitesche, euklidische Transformationen durchgeführt, d.h., mit Hilfe des euklidischen Divisionsalgorithmus [13] wird erreicht, daß für zwei bestimmte Werte k und i , mit $k > i$, der Grad der Matrixelemente w'_{ik} bzw. w'_{ki} einer parahermiteschen Matrix $\underline{W}'$ kleiner als der Grad des Diagonalelements w'_{ii} ist. Dies kann durch rechts- und linksseitige Multiplikation der Matrix $\underline{W}$ mit unimodularen Matrizen $\underline{V}$ bzw. $\underline{V}_*$ erreicht werden:

$$\underline{W}' = \underline{V}_* \underline{W} \underline{V},$$

mit

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & q & \\ & & & \ddots & & \\ & & 0 & & & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ \\ k \end{matrix},$$

d.h.

$$w'_{kk} = w_{ii} q_* q + w_{ik} q_* + w_{ik} q_* + w_{kk},$$

$$w'_{ik} = w_{ii} q + w_{ik} = w'_{ki},$$

$$w'_{ii} = w_{ii},$$

$$\deg w'_{ik} < \deg w'_{ii}.$$

Lemma A 6.3:

Sei $\underline{W}$ eine Polynommatrix mit den gleichen Eigenschaften wie in Lemma A 6.2, dann gilt bei Anwendung der oben erwähnten eukli-

schen Transformation $\underline{W}' = \underline{V}_* \underline{W} \underline{V}$ für das Diagonalelement w'_{kk}

$$\deg w'_{kk} \leq \deg w_{kk}.$$

Beweis:

Der euklidische Divisionsalgorithmus erfordert

$$\deg q = \deg w_{ik} - \deg w_{ii}.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} \deg w_{ii} q_* q &= \deg w_{ii} + 2(\deg w_{ik} - \deg w_{ii}) \\ &= 2 \deg w_{ik} - \deg w_{ii} \end{aligned}$$

und mit Lemma A 6.2 ergibt sich

$$\deg w_{ii} q_* q \leq \deg w_{ii} + \deg w_{kk} - \deg w_{ii} = \deg w_{kk}.$$

Entsprechend erhält man

$$\deg w_{ik} q_* = 2 \deg w_{ik} - \deg w_{ii} \leq \deg w_{kk},$$

d.h.

$$\deg w'_{kk} = \deg(w_{ii} q_* q + w_{ik*} q + w_{ik} q_* + w_{kk}) \leq \deg w_{kk}.$$

q.e.d.

Sei

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{1m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ w_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & w_{mm} \end{bmatrix},$$

wobei

$$w_{ii} \neq 0,$$

da aufgrund von

$$|w_{ik}(j\omega)|^2 \leq w_{ii}(j\omega) w_{kk}(j\omega)$$

ein identisch verschwindendes Diagonalelement implizieren würde, daß die ganze zugehörige Spalte identisch null ist, wodurch W nicht mehr unimodular wäre.

Durch eine symmetrische Zeilen- und Spaltenvertauschung kann stets

$$\deg w_{11} \leq \deg w_{22} \leq \dots \leq \deg w_{mm} \quad (*)$$

gewährleistet werden.

Mit Hilfe der bereits beschriebenen elementaren, parahermiteschen, euklidischen Transformationen

$$\underline{W}' = \underline{V} * \underline{W} \underline{V}$$

kann erreicht werden, daß

$$\deg w'_{1k} = \deg w'_{k1} < \deg w'_{11}.$$

Falls nun eines der neuen Elemente w'_{ii} , $i > 1$, einen kleineren Grad als $w'_{11} = w_{11}$ besitzt, so wird der eben geschilderte Prozeß der Zeilen- und Spaltenvertauschungen und euklidischen Operationen wiederholt. Da w'_{ii} aus den bereits erwähnten Gründen nicht identisch null werden kann, so erhält man nach endlich vielen Schritten

$$\deg w'_{1k} = \deg w'_{k1} < \deg w'_{11},$$

$$\deg w'_{11} \leq \deg w'_{kk}, \quad k \in \{2, \dots, m\},$$

mit anderen Worten

$$\deg w'_{1k} = \deg w'_{k1} < \frac{1}{2}(\deg w'_{11} + \deg w'_{kk}), \quad k \in \{2, \dots, m\}.$$

Zur Erleichterung der Notation wird nun W' wieder in W umbenannt, d.h., es gelte

$$\deg w_{1k} = \deg w_{k1} < \frac{1}{2}(\deg w_{11} + \deg w_{kk}), \quad k \in \{2, \dots, m\},$$

$$\deg w_{11} \leq \deg w_{22} \leq \dots \leq \deg w_{mm}.$$

Jetzt wird das gleiche Verfahren bezüglich der zweiten Spalte und der zweiten Zeile wiederholt, so daß

$$\deg w'_{2k} = \deg w'_{k2} < \deg w'_{22}, \quad k \in \{3, \dots, m\}.$$

Aufgrund von Lemma A 6.3 kann sich hierbei der Grad der Diagonalelemente w'_{ii} , $i > 2$, gegenüber dem Grad des jeweiligen Elements w_{ii} nicht erhöht haben. Falls sich jedoch der Grad einiger Diagonalelemente verringert haben sollte, so kann durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen die alte Ordnung (*) wieder hergestellt werden. Nun muß allerdings der ganze bisherige Prozeß euklidischer Operationen wiederholt werden. Falls dagegen die Beziehung (*) auch für die neue Matrix erhalten blieb, so kann das gleiche Verfahren bezügl. der dritten Zeile und Spalte durchgeführt werden, usw.

Nach endlich vielen Schritten erhält man eine Matrix $\underline{W}$, bei der sich der Grad der Diagonalelemente bei keiner der nachfolgenden euklidischen Operationen mehr verändert. Dies ist eine direkte Konsequenz des Lemmas A 6.3, da der Grad der Diagonalelemente nie größer wird und nur endlich oft erniedrigt werden kann. Denn spätestens dann, wenn alle Diagonalelemente von null verschiedene Konstanten sind, ist der eben beschriebene Zustand erreicht. Deshalb gelte im folgenden bei jeder Operation

$$\deg w'_{kk} = \deg w_{kk}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (**)$$

Nacheinander wird nun der euklidische Prozeß bezüglich aller Spalten und Zeilen durchgeführt, ohne daß eine weitere Zeilen- und Spaltenvertauschung notwendig wäre.

Behauptung:

Am Ende dieses Verfahrens erhält man

$$\deg w_{ik} = \deg w_{ki} < \frac{1}{2}(\deg w_{ii} + \deg w_{kk}), \quad (***)$$

$$i, k \in \{1, \dots, m\} \text{ und } i \neq k.$$

Beweis:

Die Behauptung soll schrittweise bewiesen werden.

Annahme:

Die Ungleichung (***) gelte für alle $i < i_0$, $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$, wo i_0 eine bestimmte Zahl $i_0 > 1$ ist. Wir werden zeigen, daß eine Umwandlung so möglich ist, daß (***) für alle $i \leq i_0$, $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$ gilt.

Führt man die erwähnten elementaren, parahermiteschen, euklidischen Transformationen bezügl. des Elements $w_{i_0 i_0}$ durch, um den Grad der Elemente $w_{i_0, k}$ für $k > i_0$ und w_{i, i_0} für $i > i_0$ abzusenken, so bleiben die Elemente w_{ik} für $i \leq i_0$ und $k \leq i_0$ unbeeinflusst.

Für $i < i_0$ und $k > i_0$ wird ein Polynom vom Grade

$$v = \deg w_{ii_0} + (\deg w_{i_0 k} - \deg w_{i_0 i_0})$$

zum Element w_{ik} hinzuaddiert, aber laut Induktionssannahme (***) gilt

$$\deg w_{ii_0} < \frac{1}{2} (\deg w_{ii} + \deg w_{i_0 i_0}),$$

und gemäß Lemma A 6.2 erhält man

$$\deg w_{i_0 k} \leq \frac{1}{2} (\deg w_{i_0 i_0} + \deg w_{kk}),$$

d.h.

$$v < \frac{1}{2} (\deg w_{ii} + \deg w_{kk}).$$

Mit Gleichung (**) ergibt sich

$$v < \frac{1}{2} (\deg w'_{ii} + \deg w'_{kk}),$$

wodurch die Ungleichung

$$\deg w'_{ik} < \frac{1}{2} (\deg w'_{ii} + \deg w'_{kk})$$

für die betrachteten Elemente erhalten bleibt. Somit besitzt nun die Beziehung (***) Gültigkeit für alle $i \leq i_0$, $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$.

Für $i=1$ wurde bereits gezeigt, daß die Ungleichung (**) erreicht werden kann. Damit ist bewiesen, daß in der Tat (**) schrittweise für alle $i=1$ bis m erreicht werden kann.

Man nehme nun an, die Elemente der unimodularen Matrix $\underline{W}$ erfüllen die Beziehung (***), dann erhält man für den Grad der Determinante von $\underline{W}$

$$\deg \det \underline{W} = \sum_{i=1}^m \deg w_{ii}.$$

Aber $\deg \det \underline{W} = 0$, und dadurch

$$\deg w_{ii} = 0, \quad i=1, \dots, m,$$

d.h., sämtliche Elemente w_{ii} sind konstant. Somit erhält man aus (***)

$$w_{ik} \equiv 0 \quad \text{für } i \neq k.$$

Mit anderen Worten, $\underline{W}$ ist eine positiv definite, konstante Diagonalmatrix. Diese läßt sich stets in der Form

Die Elemente in der schattierten Fläche sind für die weiteren Betrachtungen ohne Bedeutung. Die letzten $m-r$ Spalten von $\underline{A} \underline{U}$ sind identisch null. Dies ändert sich nicht durch linksseitige Operationen, insbesondere nicht für

$$\underline{D} := \underline{U}_* \underline{A} \underline{U},$$

wobei $\underline{D}_* = \underline{D}$, da $\underline{A}_* = \underline{A}$,

d.h., auch die letzten $m-r$ Zeilen von $\underline{D}$ sind identisch null. Mit anderen Worten, $\underline{D}$ besitzt die Struktur

$$\underline{D} = \underline{U}_* \underline{A} \underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{E} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix},$$

$\begin{matrix} r & m-r \end{matrix}$

wobei

$$\underline{E}_* = \underline{E},$$

$$\underline{E}(j\omega) \geq 0,$$

$$\text{rank } \underline{E} = r.$$

Die reguläre Polynommatrix $\underline{E}$ kann aufgrund obiger Ausführungen in ein Produkt

$$\underline{E} = \underline{B}_* \underline{B}$$

zerlegt werden, mit

$$\det \underline{B} \neq 0 \text{ für } \text{Re } p > 0.$$

Somit läßt sich $\underline{A}$ auch schreiben als

$$\underline{A} = \underline{U}_*^{-1} \begin{bmatrix} \underline{B}_* & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{U}^{-1}.$$

Definiert man jetzt noch

$$\underline{F} := \frac{\underline{B}}{\underline{c}},$$

so erhält man für die gegebene rationale Matrix $\underline{H}$

$$\underline{H} = \frac{\underline{A}}{\underline{d}} = \frac{\underline{A}}{\underline{c}_* \underline{c}} = \underline{U}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{F}_* & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{U}^{-1} = \underline{C}_* \underline{C},$$

mit

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{F} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{U}^{-1}.$$

Da gilt

$$\underline{F}^{-1} = \underline{c} \underline{B}^{-1} = \frac{\underline{c} \text{Adj } \underline{B}}{\det \underline{B}}$$

und

$$\det \underline{B} \neq 0 \quad \text{für} \quad \text{Re } p > 0,$$

so ist $\underline{F}^{-1}$ holomorph für $\text{Re } p > 0$.

Bei der Aufteilung der Nullstellen von $\underline{d}$ auf die Polynome $\underline{c}$ und $\underline{c}_*$ kann stets gewährleistet werden, daß

$$\underline{c} \neq 0 \quad \text{für} \quad \text{Re } p > 0,$$

d.h., auch $\underline{F}$ ist holomorph für $\text{Re } p > 0$.

- A 7 Bereits 1966 beschäftigte sich Youla [8] mit der Synthese von Netzwerken, die sowohl konzentrierte reaktive Elemente als auch Leitungselemente gleicher Verzögerungszeit τ enthalten. Die Streumatrix eines solchen Netzwerks ist rational in p und $e^{\tau p}$. Ersetzt man $e^{\tau p}$ durch die komplexe Variable s , so erhält man eine zweidimensionale Streumatrix $\underline{W}(p,s)$, die

rational in (p,s) ist. Die Matrix

$$\underline{S}(z_1, z_2) = \underline{W}\left(\frac{z_1-1}{z_1+1}, z_2\right)$$

ist ein Element aus Ω_z , d.h., die Synthese von $\underline{W}(p,s)$ ist dem in Kapitel 4 betrachteten Problem sehr ähnlich.

In der Einleitung wurden bereits Unterschiede zwischen dem hier beschriebenen Syntheseverfahren und der Arbeit [8] genannt, daneben macht Youla in seiner Publikation zwei mathematisch bedenkliche Aussagen, die an dieser Stelle präzisiert werden sollen, da sie die Basis für die Beweisführung in [8] bilden.

In den folgenden Bemerkungen wird Youlas Terminologie benutzt, um den Vergleich mit seiner Arbeit zu erleichtern.

i) Man betrachte die Schaltung in Bild A 7.1.

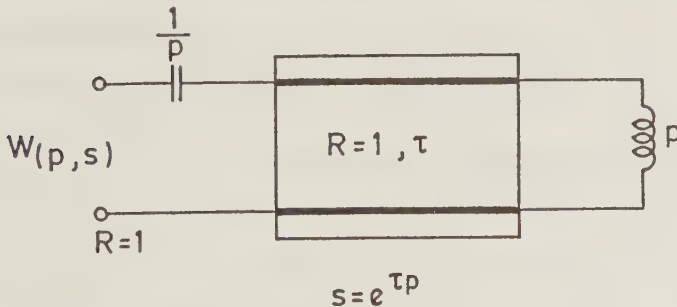


Bild A 7.1

Die Reflektanz dieser Schaltung

$$W(p,s) = \frac{(1-p)(1-2p) + (1+p)s^2}{(1-p) + (1+p)(1+2p)s^2}$$

gehört offensichtlich zur Klasse der in [8] betrachteten Funktionen.

Die in [8, Corollary 2, Gl. (75)] definierte Matrix $\underline{F}(p)$ ergibt sich für das gewählte Beispiel zu

$$\underline{F}(p) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1-p}{(1+p)(1+2p)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

d.h.

$$\underline{F}(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix $\underline{F}(0)$ besitzt die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = j$ und $\lambda_2 = -j$, d.h.

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1.$$

In dem Begleittext zwischen den Gleichungen (122) und (123) der Arbeit [8] wird jedoch die Behauptung erhoben, daß die Beträge aller Eigenwerte von $\underline{F}(j\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$ kleiner als eins sind, was offensichtlich obigem Beispiel widerspricht.

ii) Die rechte Seite der Gleichung

$$W(p,s) = J(p) + \underline{H}(p)(s\underline{I} - \underline{F}(p))^{-1} \underline{G}(p)$$

(vergl. [8, (34)]) wird in der Arbeit [8] in der Umgebung des Punktes $s = \infty$ in eine Potenzreihe der Form

$$W(p,s) = J(p) + \underline{H}(p) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\underline{F}(p)^i}{s^{i+1}} \underline{G}(p)$$

entwickelt (vergl. [8, (39)]). Hierbei wurden keinerlei Aussagen über die entstehenden Konvergenzprobleme der unendlichen Summe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\underline{F}(p)^i}{s^{i+1}}$$

getroffen. Hierzu betrachte man wiederum die Schaltung in Bild A 7.1. Die Eigenwerte der zugehörigen Matrix

$$\underline{F}(p) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1-p}{(1+p)(1+2p)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ergeben sich aus der Gleichung

$$\lambda^2 = -\frac{1-p}{(1+p)(1+2p)},$$

d.h., für die Eigenwerte μ_i , $i=1,2$, der Matrix $\frac{\underline{F}(p)}{s}$ erhält man

$$|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = \left| \frac{1-p}{s^2(1+p)(1+2p)} \right|.$$

Für jeden Punkt s_0 aus der Umgebung des Punktes $s=\infty$ existiert aber ein Punkt p_0 aus der Umgebung des Punktes $p=-1$, so daß

$$|\mu_1| > 1.$$

Laut [25, Kapitel 20.3] ist für solche Punktepaare (p_0, s_0) die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F(p_o)^i}{s_o^{i+1}}$$

divergent, weshalb die Argumentation in Youlas Arbeit
bedenklich erscheint.

Literaturverzeichnis:

- [1] A. Fettweis, "Principles of Multidimensional Wave Digital Filtering", Digital Signal Processing, Point Lobos Press, 13000 Kaymer St., Hollywood Ca. 91605.
- [2] A. Fettweis, "Multidimensional Wave Digital Filters", Proc. of the 1976 European Conference on Circuit Theory and Design, Bd. II, 1976.
- [3] A. Fettweis, G. Linnenberg, "A class of Two-Dimensional Reactance Functions with Applications", AEÜ, Bd. 34, Juli 1980.
- [4] N.N.S. Swamy, K.S. Thyagarajan, V. Ramachandran, "Two-dimensional wave digital filters using doubly terminated two-variable LC ladder configurations", J. Franklin Inst., Bd. 304, 1977, S. 201-215.
- [5] H.C. Reddy, P.K. Rajan, N.N.S. Swamy, "Realization of resistively terminated two variable lossless ladder networks", IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-29, Dezember 1982, S. 827-832.
- [6] T.N. Rao, "Minimal Synthesis of Two-variable Reactance Matrices", Bell Syst. Techn. J., Bd. 48, 1969.
- [7] A. Fettweis, S. Basu, "New Results on Multidimensional Hurwitz polynomials", Proceedings of ISCAS 85, Kyoto, Bd. 3, Juni 1985, S. 1359-1362.
- [8] D.C. Youla, "The synthesis of networks containing lumped and distributed elements", Proc. Symp. Generalized Networks, Polyt. Inst. Brooklyn Press, New York, 1966.
- [9] T. Koga, "Synthesis of finite passive n-ports with prescribed positive real matrices of several variables", IEEE Trans. Circuit Theory, CT-15, März 1968, S. 2-23.

- [10] N.K Bose, "Applied Multidimensional Systems Theory", Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1982.
- [11] A. Fettweis, "On the Scattering Matrix and the Scattering Transfer Matrix of Multidimensional Lossless Two-ports", AEÜ, Bd. 36, September 1982, S. 374-381.
- [12] A. Fettweis, "Some Properties of Scattering Hurwitz Polynomials", AEÜ, Bd. 38, März 1984, S. 171-176.
- [13] T. Kailath, "Linear Systems", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.
- [14] A. Fettweis, S. Basu, "On discrete scattering Hurwitz polynomials", Circuit Theory and Applications, Bd. 13, 1985, S. 47-49.
- [15] H. Unbehauen, "Regelungstechnik II", Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1983.
- [16] J.W. Brewer, "Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory", IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-25, September 1978, S. 772-781.
- [17] A.S. Householder, "The Theory of Matrices in Numerical Analysis", Blaisdell, New York, 1964.
- [18] A. Fettweis, G. Linnenberg, "An Extension of the Maximum-Modulus Principle for Applications to Multidimensional Networks", AEÜ, Band 38, Februar 1984, S. 131-135.
- [19] R. Nevanlinna, V. Paatero, "Einführung in die Funktionentheorie", Brinkhäuser Verlag, Basel, 1965.
- [20] H. Behnke, P. Tullen, "Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen", Springer-Verlag, Berlin, 1970.

- [21] B. McMillan, "Introduction to formal realizability theory", Bell System Tech. Journal, Bd. 31, 1952, S. 217.
- [22] A. Fettweis, "Wave Digital Filters: Theory and Practice", Proc. of the IEEE, Bd. 74, Februar 1986, S. 270-327.
- [23] F.R. Gantmacher, "Matrizentheorie", Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [24] A. Kummert, "Synthese zweidimensionaler Reaktanzmehrtore", Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, 1985.
- [25] R. Zurmühl, S. Falk, "Matrizen und ihre Anwendungen", Springer-Verlag, Teil 1, Berlin, 1984.
- [26] N.K. Bose, "Multidimensional Systems Theory", D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1985.
- [27] M. Bocher, "Introduction to Higher Algebra", Dover Publications, New York, 1964.
- [28] D. Hilbert, "Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten", Math. Ann., Bd. 32, 1888, S. 342-350.
- [29] R.W. Newcomb, "Linear Multiport Synthesis", McGraw-Hill, New York, 1966.
- [30] V. Belevitch, "Factorization of scattering matrices with applications to passive network synthesis", Philips Res. Rept., Bd. 18, S. 275.
- [31] A. Fettweis, "A New Approach to Hurwitz Polynomials in Several Variables", Circuits Systems Signal Process., Bd. 5, April 1986.

- [32] E. Landau, "Über die Darstellung definiter Funktionen durch Quadrate", Mathem. Annalen, Bd. 62, 1906, S. 272.
- [33] G. Linnenberg, "Über die diskrete Verarbeitung mehrdimensionaler Signale unter Verwendung von Wellendigitalfiltern", Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1984.
- [34] R.M. Mersereau, D.E. Dudgeon, "The Representation of Two-Dimensional Sequences as One-Dimensional Sequences", IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Proc., ASSP-22, 1974, S. 320-325.
- [35] V. Belevitch, "Classical Network Theory", Holden-Day, San Francisco, 1968.
- [36] R. Saal, "Handbuch zum Filterentwurf", AEG-Telefunken, 1979.
- [37] A. Fettweis, "Cascade synthesis of lossless two-ports by transfer matrix factorization", in BOITE, R.(Ed.): "Network theory" (Gordon and Breach, New York, 1972), S. 43-103.
- [38] A. Fettweis, "Factorization of transfer matrices of lossless two-ports", IEEE Trans., CT-17, 1970, S. 86-94.
- [39] K. Meerkötter, "Beiträge zur Theorie der Wellendigitalfilter", Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1979.
- [40] D.D. Siljak, "Stability Criteria for Two-variable Polynomials", IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-22, März 1975, S. 185-189.
- [41] N.K. Bose, S. Basu, "Test for polynomial zeros in polydisc distinguished boundary", IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-25, 1978, S. 684-693.
- [42] P.N. Delsarte, Y.V. Genin, Y.V. Kamp, "A simple proof of Rudins multivariable stability theorem", IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ASSP-28, 1980, S. 701-705.

- [43] J. Gregor, "On two-variable Hurwitz polynomials", Proc. 1981 Europ. Conf. on Circuit Theory and Design, Amsterdam, North Holland, 1981, S. 686-688.
- [44] E.I. Jury, "Stability of multi-dimensional scalar and matrix polynomials", Proc. IEEE, Bd. 66, 1978, S. 1018-1047.
- [45] M.G. Strintzis, "BIBO stability of multidimensional filters with rational spectra", IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, ASSP-24, 1977, S. 549-553.
- [46] E. Zeheb, W. Wallach, "Zero sets of multiparameter functions and stability of multidimensional systems", IEEE. Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ASSP-29, 1981, S. 197-206.
- [47] S. Basu, A. Fettweis, "Test for Two-Dimensional Scattering Hurwitz Polynomials", Circuits Systems Signal Process., Bd. 3, Februar 1984, S. 225-242.
- [48] N.K. Bose, "Applied Multidimensional Systems", Van Nostrand Reinhold, New York, 1981.
- [49] J. Schur, "Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind", Teil 1, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 147, 1917, S. 205-232..
- [50] J. Schur, "Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind", Teil 2, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 148, 1918, S. 122-145.
- [51] B.D.O. Anderson, "An Algebraic Solution to the Spectral Factorization Problem", IEEE Trans. on Automatic Control, AC-12, August 1967, S. 410-414.

- [52] D.C. Youla, "On the Factorization of Rational Matrices", IRE Trans. on Information Theory, Juli 1961, S. 172-189.
- [53] M.G. Strintzis, "A Solution to the Matrix Factorization Problem", IEEE Trans. on Information Theory, IT-18, März 1972, S. 225-232.
- [54] R. Saeks, "The Factorization Problem - A Survey", Proc. of the IEEE, Band 64, Januar 1976, S. 90-95.
- [55] M.C. Davis, "Factoring the Spectral Matrix", IEEE Trans. on Automatic Control, Oktober 1963, S. 296-305.
- [56] J.P. Vandevall, P. Dewilde, "On the Minimal Spectral Factorization of Non-singular Positive Rational Matrices", IEEE Trans. on Information Theory, IT-21, November 1975, S. 612-618.
- [57] A. Fettweis, "Multidimensional digital filters with closed loss behavior designed by complex network theory approach", zur Veröffentlichung eingereicht.
- [58] R. Delsarte, Y. Genin, Y. Kamp, "A Simple Approach to Spectral Factorization", IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-25, November 1978, S. 943-946.
- [59] B.D.O. Anderson, S. Vongpanitlerd, "Network Analysis and Synthesis", Prentice Hall, New Jersey, 1973.
- [60] S. Barnett, C. Storey, "Matrix Methods in Stability Theory", Nelson and Sons LTD, 1970.
- [61] A. Fettweis, S. Basu, "New Results on Stable Multi-dimensional Polynomials - Part I: Continuous Case", IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-34, Oktober 1987, S. 1221-1231.

- [62] V. Mangulis, "Handbook of Series for Scientists and Engineers", Academic Press, New York, 1965.
- [63] R.E. Crochiere, L.R. Rabiner, "Multirate digital signal processing", Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1983.
- [64] W. Drews, "Entwurf und Aufbau digitaler Polyphasen-Filterbänke unter Verwendung von Wellendigitalfiltern", Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1986.
- [65] A.V. Oppenheim, R.W. Schafer, "Digital Signal Processing", Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1975.
- [66] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, "Taschenbuch der Mathematik", Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt, 1981.

Lebenslauf

6. 4.1959	geboren in Amberg
1965 - 1971	Besuch der Volksschule in Hahnbach
1971 - 1975	Staatl. Realschule in Sulzbach-Rosenberg
1975 - 1977	Staatl. Fachoberschule in Amberg
1977 - 1978	Ableistung des Wehrdienstes
1978 - 1982	Studium der Elektrotechnik an der Fachhochschule Coburg
1982 - 1985	Studium der Elektrotechnik an der Ruhr-Universität Bochum
3. 5.1985	Diplom-Hauptprüfung in Elektrotechnik
seit 1. 6.1985	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der Ruhr-Universität Bochum

